ESERCIZIO 1

Una bilancia digitale mostra il peso reale più un errore casuale che ha distribuzione normale con media 0 e deviazione standard $\sigma = 0.1$ once. Supponiamo che le letture di cinque pesate successive dello stesso oggetto siano le seguenti: 3.142, 3.163, 3.155, 3.150, 3.141

1) Determina un intevallo di confidenza al 95% del peso reale

calcoliamo per prima cosa la media compionaria:

$$\overline{x} = \frac{3.142 + 3.163 + 3.155 + 3.150 + 3.141}{5} = 3.15$$

Poichè conosciamo il valore vero della varianza non è necessario stimarlo e la statistica test seguirà una distribuzione normale standard. L'intervallo è:

$$\left(\overline{X} - z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\overline{X} - 1.960\frac{0.1}{\sqrt{5}}, \overline{X} + 1.960\frac{0.1}{\sqrt{5}}\right)$$

Sostituendo i valori osservati otteniamo

$$(3.063, 3.237)$$

Nota: 0.025 deriva da $(1 - 0.95)/2$

2) Determina un intevallo di confidenza al 99% del peso reale
L'intervallo aleatorio diviene

$$\left(\overline{X} - z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\overline{X} - 2.576\frac{0.1}{\sqrt{5}}, \overline{X} + 2.576\frac{0.1}{\sqrt{5}}\right)$$

Sostituendo i valori osservati otteniamo

$$(3.035, 3.265)$$

ESERCIZIO 2

I seguenti punteggi sono i punteggi vincenti in otto edizioni scelte a caso del torneo Masters di golf:

$$285, 279, 280, 288, 279, 286, 284, 279$$

Utilizza questi dati per costruire un intervallo di confidenza al 90% del punteggio vincente medio nel torneo Masters, nell'ipotesi di un modello normale.

Calcoliamo la media campionaria:

$$\overline{x} = \frac{285 + 279 + 280 + 288 + 279 + 286 + 284 + 279}{8} = 282.5$$

Calcoliamo la varianza campionaria:

$$s^2 = \frac{(285-282.5)^2+(279-282.5)^2+(280-282.5)^2+(288-282.5)^2}{7}+$$

$$+\frac{(279-282.5)^2+(286-282.5)^2+(284-282.5)^2+(279-282.5)^2}{7}=$$

$$=\frac{(2.5)^2+(-3.5)^2+(-2.5)^2+(5.5)^2+(-3.5)^2+(3.5)^2+(1.5)^2+(-3.5)^2}{7}=$$

$$=\frac{6.25+12.25+6.25+30.25+12.25+12.25+2.25+12.25}{7}=\frac{93}{7}=13.28$$

Non conosciamo esattamente la varianza, ma solo la varianza campionaria, quindi la statistica test seguirà una distribuzione t di Student. L'intervallo al 90% è:

$$\left(282.5-t_{7,0.05}\frac{\sqrt{13.28}}{\sqrt{8}}, 282.5+t_{7,0.05}\frac{\sqrt{13.28}}{\sqrt{8}}\right)=\left(282.5-1.895\frac{3.64}{2.828}\right)=(280.06, 284.94)$$

ESERCIZIO 3

Su un campione di 400 bibliotecari, 335 sono donne. Calcola un intervallo di confidenza al 95% della proporzione dei bibliotecari che sono donne

Stimiamo π la probabilità che un bibliotecario sia donna

$$p=\frac{335}{400}=0.8375$$

Utilizzando l'approssimazione normale, l'intervallo di confidenza richiesto è:

$$\left(P-z_{0.025}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}, P+z_{0.025}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right)=$$

dove P indica lo stimatore di π.

Sostituendo il valore stimato otteniamo

$$=\left(0.8375-1.960\sqrt{\frac{0.8375(0.1635)}{400}}, 0.8375+1.960\sqrt{\frac{0.8375(0.1635)}{400}}\right)$$

$$(0.8375-0.036, 0.8375+0.036)=(0.8015, 0.8735)$$