ESERCIZIO 1

La probabilità che un vulcano erutti è, ogni giorno, 1/1000. Se si osserva il vulcano per 500 giorni, quanto valgono le seguenti probabilità?

1) Non erutta mai

Chiamiamo X il numero delle eruzioni. $E[X]$ è evidentemente $500 \cdot 1/1000 = 1/2$. Quindi X è approssimativamente uguale ad una variabile di Poisson di parametro 0.5. Quindi

$$P\{X = 0\} = \frac{e^{-0.5}0.5^0}{0!} = e^{-0.5} = 0.6$$

2) Erutta esattamente una volta

$$P\{X = 1\} = \frac{e^{-0.5}0.5^1}{1!} = e^{-0.5} \cdot 0.5 = 0.3$$

3) Erutta esattamente due volte

$$P\{X = 1\} = \frac{e^{-0.5}0.5^2}{2!} = \frac{e^{-0.5} \cdot 0.25}{2} = 0.075$$

4) Erutta almeno una volta

$$P\{X > 0\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - 0.6 = 0.4$$

ESERCIZIO 2

I dati seguenti rappresentano la lunghezza, in centimetri, dei maschi di una certa specie di pesci:

10.2	10.0	9.6	8.6	12.3	11.0	5.3	10.4	15.9	7.5	8.7
12.3	6.5	13.4	4.0	11.0	15.7	10.6	10.1	9.6	7.4	14.0

Si presuppone che i dati seguano una distribuzione di media 10 e varianza 9 (quindi di deviazione standard 3). Decidiamo di classificare un dato come anomalo se si discosta troppo dalla media, precisamente se, detto x_i il dato, $P(X > x_i) < 0.025$ oppure se $P(X < x_i) < 0.025$. Dire quali tra i dati sono anomali

Soluzione: Cerchiamo qual'è la soglia α oltre la quale un dato è anomalo. Per calcolarlo dobbiamo ricondurci al caso della normale standard (che indichiamo con Z)

$$P(X < \alpha) < 0.025 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{3} < \frac{\alpha - 10}{3}\right) < 0.025 \Rightarrow P\left(Z < \beta\right) < 0.025$$

Dove abbiamo fatto il cambio di variabile $\beta = (\alpha - 10)/3$. Utilizzando le tavole troviamo che $\beta = 1.96$, possiamo quindi calcolare α

$$\beta = \frac{\alpha - 10}{3} \Rightarrow \alpha = 3 \cdot \beta + 10 = 3 \cdot 1.96 + 10 = 15.88$$

Un calcolo analogo ci permette di calcolare anche l'altra soglia

$$P(X < \alpha) > 0.025 \Rightarrow P\left(\frac{X - 10}{3} > \frac{\alpha - 10}{3}\right) < 0.025 \Rightarrow P(Z > \beta) < 0.025$$

$\beta = -1.96$ (per la simmetria della normale standard rispetto allo 0)

$$\beta = \frac{\alpha - 10}{3} \Rightarrow \alpha = 3 \cdot \beta + 10 = 3 \cdot (-1.96) + 10 = 4.12$$

Quindi un dato è anomalo se è maggiore di 15.88 oppure minore di 4.12, e i dati anomali nelle osservazioni sono 15.9 e 4.0

ESERCIZIO 3

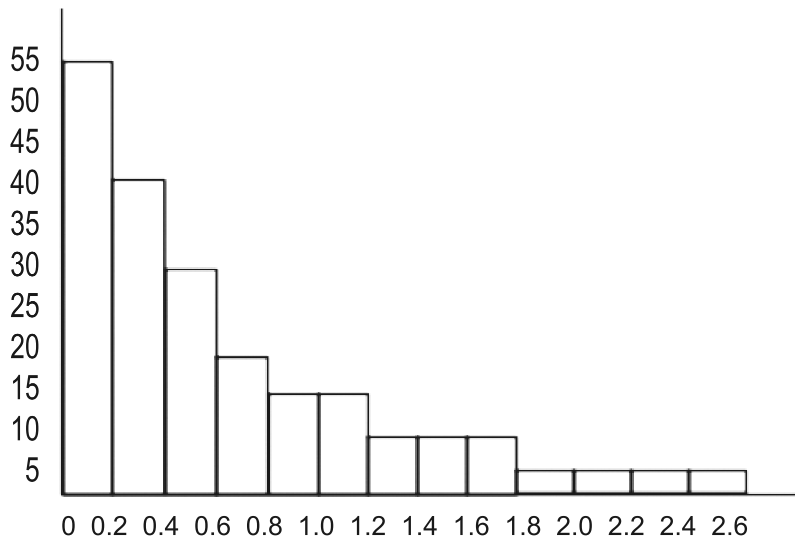
I dati seguenti rappresentano la durata, in anni, di una particolare batteria per auto. Prima di effettuare le osservazioni non si conosceva con certezza che legge avrebbero seguito. Le ipotesi accettate erano che avrebbero potuto seguire una legge Normale o un legge Esponenziale

0.02	0.04	0.04	0.05	0.08	0.09	0.11	0.13	0.15	0.16	0.17	0.21	0.23	0.24	0.27
0.27	0.33	0.35	0.39	0.44	0.46	0.47	0.52	0.55	0.59	0.62	0.63	0.75	0.77	0.86
0.89	0.94	1.03	1.08	1.14	1.22	1.38	1.45	1.58	1.62	1.71	1.88	2.04	2.22	2.41

1) guardando i dati, che legge pensi che seguano?

Rappresentiamo i dati in un istogramma

Classe	Larghezza	Elementi	Altezza Barra
[0.0,0.2)	0.2	11	11/0.2=55
[0.2,0.4)	0.2	8	8/0.2=40
[0.4,0.6)	0.2	6	6/0.2=30
[0.6,0.8)	0.2	4	4/0.2=20
[0.8,1.0)	0.2	3	3/0.2=15
[1.0,1.2)	0.2	3	3/0.2=15
[1.2,1.4)	0.2	2	2/0.2=10
[1.4,1.6)	0.2	2	2/0.2=10
[1.6,1.8)	0.2	2	2/0.2=10
[1.8,2.0)	0.2	1	1/0.2=5
[2.0,2.2)	0.2	1	1/0.2=5
[2.2,2.4)	0.2	1	1/0.2=5
[2.4,2.6)	0.2	1	1/0.2=5



E' ora evidente che i dati seguono una distribuzione Esponenziale

2) stime successive affermano che il parametro λ della distribuzione è circa 1.5. Calcola la probabilità che una batteria scelta a caso duri tra uno e due anni

La funzione di densità di una variabile esponenziale è: $\lambda e^{-\lambda x}$, quindi

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_1^2 = -e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} = -e^{-3} + e^{-1.5} = -0.05 + 0.22 = 0.17$$