ESERCIZIO 1

Lanciamo tre volte una moneta regolare e consideriamo equiprobabili i possibili risultati.

Dimostrare che per i 3 eventi

- A_1= Almeno due teste
- A_2= Un numero pari di teste
- A_3= Croce al primo lancio

vale $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$ ma che gli eventi non sono indipendenti.

Soluzione: Calcoliamo quindi $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ e $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$. Lo spazio S degli eventi è

$$S = \{(TTT), (TTC), (TCT), (TCC), (CTT), (CTC), (CCT), (CCC)\}$$

mentre i sottoinsiemi di S relativi agli eventi sono:

$A_1 = \{(TTT), (TTC), (TCT), (CTT)\}$
$A_2 = \{(TTC), (TCT), (CTT), (CCC)\}$
$A_3 = \{(CTT), (CTC), (CCT), (CCC)\}$

Possiamo quindi trovare immediatamente:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(CTT)\}$

Poiché tutti gli eventi sono equiprobabili:

$P(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$P(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$

$P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Abbiamo verificato che $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$. Se gli eventi fossero indipendenti tra di loro, allora dovrebbe essere vero che:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$
$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

Se anche una sola di queste non fosse vera, allora i tre eventi non sarebbero indipendenti. Controlliamo se è vera la seconda

$A_1 \cap A_3$=$\{$*escono almeno 2 teste ed esce croce al primo lancio*$\}$

Chiaramente l'unica possibilità è (CTT), quindi

$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{8}$

Ma $P(A_1) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Quindi gli eventi A_1 e A_3 non sono indipendenti e questo è sufficiente a provare che i tre eventi non sono tra loro indipendenti.

Per completezza verifichiamo anche le altre due condizioni

$A_1 \cap A_2 = \{$*escono almeno 2 teste e un numero pari di teste*$\} = \{$*escono 2 teste*$\}$

Sarà $A_1 \cap A_2 = \{(TTC), (TCT), (CTT)\}$
e di conseguenza $P(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$

Infine
$A_2 \cap A_3 = \{$*esce un numero pari di teste e croce al primo lancio*$\} = \{$(CCC),(CTT)$\}$
Da cui $P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8} = P(A_2) \cdot P(A_3)$
Concludiamo ...

ESERCIZIO 2

Un commerciante di automobili usate venderà un'automobile al prossimo cliente con probabilità 0.3. Se questo accade, allora la macchina venduta ha la stessa probabilità di costare \$4000 o \$6000. Sia X la cifra spesa dal cliente

1) Qual'è la distribuzione di X?

$$P(X = k) = \begin{cases} 0.7 & \text{se } k = 0 \\ 0.15 & \text{se } k = 4000 \\ 0.15 & \text{se } k = 6000 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2) Quando vale $E[X]$?

$$E[X] = \sum x_i P(X = x_i) = 0 \cdot 0.7 + 4000 \cdot 0.15 + 6000 \cdot 0.15 = 600 + 900 = 1500$$

3) Quando vale $Var(X)$?

Poiché $Var(cX) = c^2 Var(X)$ (con c una costante) per semplificare i calcoli troviamo prima $Var(Y)$, dove Y ha distribuzione:

$$P(Y = k) = \begin{cases} 0.7 & \text{se } k = 0 \\ 0.15 & \text{se } k = 4 \\ 0.15 & \text{se } k = 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sappiamo anche che $E[cX] = cE[X]$, quindi $E[Y] = 1.5$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = 0 \cdot 0.7 + 4^2 \cdot 0.15 + 6^2 \cdot 0.15 - 1.5^2 = 2.4 + 5.4 - 2.25 = 5.55$$

$$Var(X) = 1000000 Var(Y) = 1000000 \cdot 5.55 = 5550000$$

4) Quando vale $SD(X)$?

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{5550000} = 2355.84$$

ESERCIZIO 3

Un soggetto adulto, considerato "non a rischio" e residente in Italia è risultato positivo al test per l'HIV. Sapendo che la prevalenza della malattia in Italia, in soggetti adulti non appartenenti a categorie a rischio, è di 1/500000 e che il test utilizzato ha una sensibilità (probabilità che il test sia positivo se l'individuo è effettivamente malato) del 95% ed una specificità (probabilità che il test sia negativo se l'individuo è effettivamente sano) del 90%, calcolare la probabilità che il soggetto positivo al test sia effettivamente malato.

Soluzione: Chiamiamo gli eventi nel seguente modo:

A=$\{$*il test ha esito positivo*$\}$
B=$\{$*l'individuo è malato*$\}$

Quello che l'esercizio richiede è $P(B|A)$, mentre quello che sappiamo è:

$P(B) = 1/500000$
$P(A|B) = 0.95$
$P(A^C|B^C) = 0.90$

L'idea è quella di usare la formula di Bayes per arrivare alla soluzione. Per farlo abbiamo però bisogno di $P(A)$, che possiamo calcolare nel seguente modo:

$$P(A) = P(A|B)P(B)+P(A|B^C)P(B^C) = P(A|B)P(B)+(1-P(A^C|B^C))(1-P(B)) =$$

$$= 0.95 \cdot \frac{1}{500000} + (1-0.90)(1-\frac{1}{500000}) = \frac{0.95}{500000} + 0.10 \cdot \frac{499999}{500000} =$$

$$= \frac{0.95}{500000} + \frac{49999.9}{500000} = \frac{50000.85}{500000} = 0.1000017$$

Usiamo ora la formula di Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.95 \cdot \frac{1}{500000}}{0.1000017} = 0.000019$$

ESERCIZIO 4

Un ricercatore semina 10 piantine di soia geneticamente modificate in 10 diversi spazi non comunicanti, per analizzare la resistenza ad una specifica malattia. Sapendo che la probabilità che la singola piantina si ammali è 0.03 calcolare:.

- la probabilità che nessuna pianta si ammali;
- il numero atteso di piante malate;
- la probabilità che si ammali almeno 1 piantina.

Soluzione: Il numero X delle piantine ammalate segue una legge binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 0.03$

La prima richiesta equivale quindi a:

$$P[X = 0] = \frac{10!}{0!(10-0)!}0.03^0(1-0.03)^{10-0} = 0.97^{10} = 0.737$$

La media della distribuzione binomiale:

$$E[X] = 10 \cdot 0.03 = 0.3$$

Per quanto riguarda la probabilità che si ammali almeno una piantina, la cosa migliore per calcolarla è passare al complementare, cioè:

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - 0.737 = 0.263$$

ESERCIZIO 5

Le spese di manutenzione sostenute ogni anno da ogni inquilino di un certo condominio hanno distribuzione normale con media \$3000 e deviazione standard \$600. Nell'ipotesi che le spese sostenute in anni diversi siano indipendenti, calcola la probabilità che nei prossimi due anni le spese di un certo inquilino siano:

1) Maggiori di \$5000

Se chiamiamo X la spesa annua dell'inquilino e Y la spesa ogni due anni dello stesso inquilino, abbiamo che $Y = X + X$, quindi usando l'indipendenza: $E[Y] = E[X] + E[X] = 3000 + 3000 = 6000$ e $Var[Y] = Var[X] + Var[X] = 600^2 + 600^2 = 720000$. Poichè la somma di normali è ancora una normale, possiamo dire che Y segue una legge normale di media 6000 e varianza 720000. Quello che dobbiamo trovare è $P(Y > 5000)$. Per farlo dobbiamo ricondurci al caso di una normale standard (cioè di media 0 e varianza 1) ed utilizzare le tavole:

$$P(Y > 5000) = P\left(\frac{Y - 6000}{\sqrt{720000}} > \frac{5000 - 6000}{\sqrt{720000}}\right) = P(Z > -1.18)$$

dove Z è la normale standard. Guardando sulle tavole troviamo il valore richiesto: 0.88

2) Minori di 7000

$$P(Y < 7000) = P\left(\frac{Y - 6000}{\sqrt{720000}} < \frac{7000 - 6000}{\sqrt{720000}}\right) = P(Z < 1.18)$$

Utilizzando le tavole troviamo il valore richiesto: 0.88

Nota: Avremmo anche potuto dare direttamente la risposta alla seconda domanda, conoscendo quella della prima, senza fare calcoli ma solamente ragionando sulla simmetria della normale: la prima domanda infatti richiedeva, vista *in termini di grafico della funzione, di calcolare l'area sotto la curva tra un valore minore di 1000 rispetto alla media ed infinito. La seconda invece di calcolare l'area sotto la curva tra meno infinito e un valore maggiore di 1000 rispetto alla media, che quindi sono uguali (per la simmetria della normale)*

3) Comprese tra \$5000 e \$7000

$$P(5000 < Y < 7000) = P(X < 7000) - P(X < 5000) = P(X < 7000) - (1 - P(X > 5000)) =$$

$$= 0.88 - (1 - 0.88) = 0.76$$