

ESERCIZIO 1

Una moneta viene lanciata 3 volte

1) Qual'è lo spazio degli esiti?

$$S = \{(TTT), (TTC), (TCT), (TCC), (CTT), (CTC), (CCT), (CCC)\}$$

2) Qual'è l'evento $A = \{\text{escono più teste che croci}\}$?

$$A = \{(TTT), (TTC), (TCT), (CTT)\}$$

3) Quanto vale $P(A)$, supponendo che la moneta sia equilibrata?

$$P(A) = \frac{\text{numero degli elementi di } A}{\text{numero degli elementi di } S} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 2

Siano A e B due eventi indipendenti tali che $P(A) = 0.8$ e $P(B^C) = 0.4$

1) Quanto vale $P(B)$?

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.4 = 0.6$$

2) Quanto vale $P(A \cap B)$?

$$P(A \cap B) = (\text{per indipendenza})P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48$$

3) Quanto vale $P(A \cup B)$?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.48 = 0.92$$

3) Quanto vale $P(A^C \cap B)$?

$$P(A^C \cap B) = (\text{per indipendenza})P(A^C) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = (1 - 0.8) \cdot 0.6 = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

ESERCIZIO 3

L'urna 1 contiene 4 biglie rosse e 3 biglie blu, l'urna 2 contiene 2 biglie rosse e 2 biglie blu. Una biglia viene scelta a caso dall'urna 1 e inserita nell'urna 2. Poi viene estratta una biglia dall'urna 2

1) Qual'è la probabilità che la biglia estratta dall'urna 2 sia rossa?

Se chiamo A l'evento -estraggo una biglia rossa dall'urna 2- e B l'evento -sposto una biglia rossa dall'urna 1 alla 2- posso spezzare $P(A)$ (che è quello che mi interessa) nel seguente modo:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$$

$P(A|B)$ = probabilità di estrarre dall'urna 2 una biglia ROSSA sapendo che ho spostato una biglia ROSSA dalla 1 alla 2 = $3/5$

$P(B)$ = probabilità di estrarre dall'urna 1 una biglia ROSSA = $4/7$

$P(A|B^C)$ probabilità di estrarre dall'urna 2 una biglia ROSSA sapendo che ho spostato una biglia BLU dalla 1 alla 2 = $2/5$

$P(B^C)$ probabilità di estrarre dall'urna 1 una biglia BLU = $3/7$

sostituendo nella formula:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{35}$$

2) Qual'è la probabilità che la biglia estratta dall'urna 1 sia rossa se la biglia estratta dall'urna 2 è blu?

Quello che l'esercizio richiede è quindi $P(B|A^C)$ (La probabilità di aver estratto una pallina rossa dall'urna 1 sapendo che NON ho estratto una pallina rossa dall'urna 2). Usando la formula di Bayes:

$$P(B|A^C) = \frac{P(A^C|B)P(B)}{P(A^C)} = \frac{(1 - P(A|B))P(B)}{1 - P(A)} = \frac{(1 - 3/5) \cdot 4/7}{1 - 18/35} = \frac{2/5 \cdot 4/7}{17/35} = 8/17$$