▷ **Esercizio 2.49** (prova in itinere a.a. 2004/05)
Un esame consta di due prove, una scritta ed una orale. Si sa che i tempi di esecuzione T ed S delle due prove sono variabili aleatorie esponenziali di media 2 ore. Supponendo che le prove si svolgano in modo indipendente l'una dall'altra, calcolare:
(i) legge, media e varianza del tempo totale necessario per sostenere l' esame, ovvero la legge della v.a. $V = T + S$;
(ii) la probabilità che uno studente concluda l'esame in non meno di 4 ore, ovvero la probabilità dell'evento $\{V \geq 4\}$;
(iii) la legge della variabile aleatoria $U = \min\{T, S\}$.

Soluzione (i) T ed S sono variabili aleatorie esponenziali indipendenti di parametro comune $\frac{1}{2}$, cioé di densità $\Gamma(1, \frac{1}{2})$. Pertanto, ricordando il teorema di addizione di v.a. con legge Gamma, si ottiene che $V \sim \Gamma(2, \frac{1}{2})$ e dunque la sua densità è:

$$f_v(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 xe^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inoltre, per la linearità del valore di aspettazione:

$$E(V) = E(T + S) = E(T) + E(S) = 4$$

ed, utilizzando l'indipendenza di T ed S:

$$Var(V) = Var(T + S) = Var(T) + Var(S) = 2 \cdot 4 = 8$$

(ii)

$$P\{V \geq 4\} = \int_4^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 xe^{-\frac{1}{2}x} dx =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 x(-2)e^{-x/2} \right]_4^{+\infty} + \int_4^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = 2e^{-2} + e^{-2} = 3e^{-2} \simeq 0.406 \ .$$

Si può alternativamente usare l'espressione della funzione di ripartizione di una variabile $\Gamma(2, \frac{1}{2})$, che è la seguente:

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/2} - \frac{1}{2}xe^{-x/2} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e dunque $P\{V \geq 4\} = 1 - F_V(4) = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2}$.
(iii) Calcoliamo la funzione di ripartizione di U.
Poichè $\{U > x\} = \{T > x, S > x\}$ e le variabili T ed S sono indipendenti, si ha la seguente catena di uguaglianze:

$$F_U(x) = P(U \leq x) = 1 - P(U > x) = 1 - P(T > x, S > x) =$$

$$= 1 - P(T > x)P(S > x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/2} \cdot e^{-x/2} = 1 - e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Dunque U è una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1.

$\triangleright$ **Esercizio 2.50** (prova d'esame del 13/07/2005)
Supponiamo che il numero N_t delle richieste di connessione giunte ad un server nell'intervallo di tempo $[0, t]$, sia una v.a. di Poisson di parametro $2t$ (il tempo t è misurato in secondi).
(i) Calcolare $P(N_t < 1)$.
(ii) Se T_1 rappresenta l'istante (aleatorio) in cui arriva la prima richiesta di connessione, trovare la densità di T_1 e calcolare $P(T_1 > 5)$ (si osservi che $\{T_1 > t\} = \{N_t < 1\}$).
(iii) Calcolare $P(1 \leq T_1 < 5)$.
(iv) Sia X la v.a. definita da $X = N_1 - 1/(E(T_1))$; calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

Soluzione (i) Risulta $P(N_t < 1) = P(N_t = 0) = e^{-2t}$.
(ii) Siccome $P(T_1 > t) = P(N_t < 1)$, si ottiene $P(T_1 > t) = e^{-2t}$ e quindi $P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-2t}$. T_1 è allora una v.a. esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Si ha poi $P(T_1 > 5) = e^{-2 \cdot 5} \cong 0$.
(iii)

$$P(1 < T_1 < 5) = \int_1^5 2e^{-2t} dt = e^{-2} - e^{-10}.$$

(iv) Siccome la media di una v.a. esponenziale di parametro λ è $1/\lambda$, e la media di una v.a. di Poisson di parametro λ è λ, si ha $E(T_1) = 1/2$, $E(N_1) = 2$, Pertanto $E(X) = E(N_1) - 1/(E(T_1)) = 2 - 2 = 0$. Si ha poi $Var(X) = Var(N_1)$ e, ricordando che la varianza di una v.a. di Poisson è λ, si ottiene $Var(X) = 2$.

$\triangleright$ **Esercizio 2.51** (prova d'esame del 19/07/2005)
Sia X una v.a. Gaussiana standard e $Y = e^{2X}$.
(i) Trovare la densità di Y.
(ii) Calcolare $P(1 < Y \leq e^2)$.

Soluzione (i) Per $t > 0$, si ha:

$$P(Y \leq t) = P(e^{2X} \leq t) = P\left(X \leq \frac{1}{2}\log t\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\log t\right),$$

ove $\Phi(x)$ denota la funzione di distribuzione di una v.a. Gaussiana standard.
Derivando, si ottiene la densità di Y per $t > 0$:

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2t} e^{-\frac{\log^2 t}{8}}$$

Per $t \leq 0$, risulta naturalmente $f_Y(t) = 0$, visto che, essendo $Y = e^{2X}$, deve essere $Y > 0$.
(ii)

$$P(1 \leq Y \leq e^2) = P(1 \leq e^{2X} \leq e^2) = P(0 \leq 2X \leq 2) =$$
$$= P(0 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413 \ .$$

▷ **Esercizio 2.52** (prova d'esame del 14/09/2005)
Sia X una v.a. con densità di Cauchy: $f(x) = 1/[\pi(1+x^2)]$.
(i) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.
(ii) Trovare la densità della v.a. $Y = F(X)$.
(iii) Calcolare $E(Y)$ e $P\left(Y \in \left(-1, \frac{1}{3}\right]\right)$.

Soluzione (i) La funzione di distribuzione $F(x)$ di X è:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} \ .$$

(ii) Risulta $F(X) = Y \in [0,1]$ e per $t \in [0,1]$ si ha:

$$P(Y \leq t) = P(F(X) \leq t) = P(X \leq F^{-1}(t)) = F(F^{-1}(t)) = t.$$

Dunque Y è uniformemente distribuita in $[0,1]$.
(iii) Si ha:

$$P\left(Y \in \left(-1, \frac{1}{3}\right]\right) = P\left(Y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) = \frac{1}{3} \ .$$

▷ **Esercizio 2.53** (prova d'esame del 28/09/2005)
Sia X una v.a. con densità esponenziale di media $1/2$ e si consideri per $x \geq 0$ la funzione $f(x) = 1 - e^{-2x}$.
(i) Trovare la densità della v.a. $Y = f(X)$; si tratta di una densità nota?
(ii) Calcolare $E(Y)$ e $var(Y)$.

Soluzione (i) Per $t \in [0,1)$, si ha:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(f(X) \leq t) = P(1 - e^{-2X} \leq t) = P(e^{-2X} \geq 1 - t) =$$

$$= P(-2X \geq \log(1-t)) = P\left(X \leq -\frac{1}{2}\log(1-t)\right) = F_X\left(-\frac{1}{2}\log(1-t)\right)$$

dove $F(x)$ è la funzione di distribuzione di X, data da $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$. Pertanto, si ottiene

$$F_Y(t) = 1 - e^{\log(1-t)} = 1 - (1-t) = t,$$

e quindi Y è uniformemente distribuita in $[0,1)$.
(ii) Ricordando le formule per la media e la varianza di una v.a. uniformemente distribuita su un intervallo, si ottiene subito $E(Y) = \frac{1}{2}$ e $var(Y) = \frac{1}{12}$.

▷ **Esercizio 2.61** (II prova in itinere a.a. 2012-13)
E' data la funzione $f(x)$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{k}\left(\frac{x^2}{8} + x\right) & \text{se } x \in [0,8] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

i) Determinare k in modo tale che $f(x)$ sia la densità di probabilità di una variabile aleatoria X;
ii) calcolare la funzione di ripartizione di X e la probabilità dell' evento $\{X \in (2,4)\}$ condizionata all'evento $\{X \leq 6\}$;
iii) calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

Soluzione (i) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ se e solo se $k > 0$. quindi affinché $f(x)$ sia una densità di probabilità è sufficiente imporre la condizione $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$, ovvero il parametro k deve essere positivo e soluzione dell' equazione

$$\int_0^8 \frac{3}{k}\left(\frac{x^2}{8} + x\right) dx = 1,$$

ovvero

$$\frac{1}{k}\left(\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^8 = \frac{1}{k}(64 + 96) = \frac{160}{k} = 1,$$

cioé $k = 160$.
(ii)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{3}{160}\left(\frac{y^2}{8} + y\right) dy & \text{se } x \in [0,8] \\ 1 & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{160}\left(\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{2}\right) & \text{se } x \in [0,8] \\ 1 & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

$$P(X \in (2,4)|X \leq 6) = \frac{P(\{X \in (2,4)\}, \{X \leq 6\})}{P(X \leq 6)}$$

$$= \frac{P(X \in (2,4))}{F_X(6)} = \frac{F_X(4) - F_X(2)}{F_X(6)}$$

Il numeratore è:

$$\frac{1}{160}\left(\frac{64}{8} + \frac{48}{2}\right) - \frac{1}{160}\left(\frac{8}{8} + \frac{12}{2}\right) = \frac{25}{160}$$

mentre il denominatore vale:

$$\frac{1}{160}\left(\frac{216}{8} + \frac{108}{2}\right) = \frac{81}{160} \ ;$$

pertanto la probabilità cercata è

$$\frac{25}{160} \cdot \frac{160}{81} = \frac{25}{81} \ .$$

(iii)

$$E(X) = \int_0^8 x \frac{3}{160}\left(\frac{x^2}{8} + x\right) dx = \int_0^8 \frac{3}{160}\left(\frac{x^3}{8} + x^2\right) dx$$

$$= \frac{3}{160}\left(\frac{x^4}{32} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^8 = \frac{28}{5} \ .$$

$$E(X^2) = \int_0^8 x^2 \frac{3}{160}\left(\frac{x^2}{8} + x\right) dx = \int_0^8 \frac{3}{160}\left(\frac{x^4}{8} + x^3\right) dx$$

$$= \frac{3}{160}\left(\frac{x^5}{40} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^8 = \frac{864}{25} \ .$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{864}{25} - \frac{784}{25} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5} \ .$$

▷ **Esercizio 2.62** (II prova in itinere a.a. 2012-13)
Per $\theta > 0$, si consideri la variabile aleatoria X con densità:

$$f(x) = \frac{\theta}{2} x^{\theta/2-1} \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

i) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X e $P(1/5 < X \leq 3)$;
ii)Trovare la densità di $Y = -\frac{\theta}{2}\ln X$ e calcolare media e varianza di Y. Si tratta di una densità nota?
iii) Per $t > 0$, calcolare $P(Y \leq t | Y > 5)$.

Soluzione (i) Calcoliamo la funzione di ripartizione di X; si ha:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{\theta}{2} y^{\theta/2-1} dy = x^{\theta/2} & \text{se } x \in (0,1) \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(1/5 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(\frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5^{\theta/2}} \ .$$

(ii) $Im(Y) = [0, +\infty)$. Allora $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$; se invece $y \geq 0$, si ha:

$$F_Y(y) = P\left(-\frac{\theta}{2}\ln X \leq x\right) = P\left(X \geq e^{-2x/\theta}\right) = 1 - F_X\left(e^{-2x/\theta}\right) = 1 - e^{-x}.$$

Quindi Y ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e di conseguenza $E(Y) = Var(Y) = 1$.
(iii) Si ha, per $t > 0:$

$$P(Y \leq t | Y > 5) = \frac{P(Y \leq t, Y > 5)}{P(Y > 5)} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 5 \\ \frac{F_Y(t) - F_Y(5)}{1 - F_Y(5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 5 \\ 1 - e^{-(t-5)} & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

▷ **Esercizio 2.63** (I prova scritta a.a. 2013-14)
Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e denotiamo con Z la parte intera di X.
(i) Trovare la densità di Z.
(ii) Calcolare $P(-3 < Z \leq 5)$.
(iii) Se U è una v.a. indipendente da Z e con la stessa distribuzione di Z, calcolare $P(U < 2Z)$.
(iv) Sia $\lambda = -\ln(0.999)$ e $p = 1 - e^{-\lambda}$, e si consideri la v.a. Y con distribuzione binomiale di parametri $(10000, p)$. Stimare $P(Y = 11)$.

Soluzione (i) La v.a. $Z = [X]$ assume valori interi non negativi; per $k = 0, 1, \ldots$ si ha:

$$P(Z = k) = P(X \in [k, k+1)) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$$

$$= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}),$$

che, posto $p = 1 - e^{-\lambda}$, si può scrivere $P(Z = k) = p(1-p)^k$; pertanto Z ha distribuzione geometrica di parametro p.
(ii) Si ha:

$$P(-3 < Z \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} p(1-p)^k = p \cdot \frac{1 - (1-p)^6}{p} = 1 - (1-p)^6.$$

(iii) Si ha:

$$P(U < 2Z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U < 2k) P(Z = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - (1-p)^{2k}) p(1-p)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k - \sum_{k=0}^{\infty} p[(1-p)^3]^k = 1 - p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^3}$$

(iv) Per $\lambda = -\ln(0.999)$, si ottiene $p = 0.001$, e quindi $Y \sim B(10000, 0.001)$. Utilizzando l' approssimazione di Poisson, si ottiene, per $k = 0, 1, \ldots 10000$,
$P(Y = k) \approx P(W = k)$ dove $W \sim Poisson(10000 \cdot 0.001)$, ovvero $W \sim Poisson(10)$. Allora, $P(Y = 11) \approx P(W = 11) = e^{-10} \frac{10^{11}}{11!} = 0.1137268$.

▷ **Esercizio 2.64** (I prova scritta a.a. 2013-14)
Per $k > 0$, si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Determinare il valore di k in modo che $f(x)$ sia la densità di una v.a. assolutamente continua X.

(ii) Scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione di X e calcolare $P(X \leq 1)$.
(iii) Se $Y = \ln X$, trovare la densità e la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione (i) Si ha:

$$\int_0^{+\infty} kxe^{-x^2} dx = -\frac{k}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{2}$$

per cui deve essere $k = 2$. La densità di X è allora $f_X(x) = 2xe^{-x^2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$.
(ii) Per quanto riguarda la sua funzione di ripartizione, si ha, per $x > 0$:

$$\int_0^x f_X(t)\ dt = \int_0^x 2te^{-t^2} dt = \left[-e^{-t^2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2};$$

Dunque:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)\ dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e $P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1}$.
(iii) Se $Y = \ln X$, per $y \in (-\infty, +\infty)$:

$$P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P(X \leq e^y)$$

ovvero

$$F_Y(y) = F_X(e^y) = 1 - e^{-(e^{2y})}.$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = f_X(e^y) \cdot e^y = 2e^{2y}e^{-(e^{2y})}\ ,\ y \in (-\infty, +\infty).$$