ANALISI MATEMATICA I (~~INGEGNERIA ELETTRONICA~~) A.A. 2005/06
SOLUZIONI DELLA I PROVA DI VERIFICA IN ITINERE
DEL PRIMO TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. (A) (i) $-1/3$; (ii) 0 .
(B) (i) $1/(2\sqrt{2})$; (ii) 0 .
(C) (i) $1/(2\sqrt{3})$; (ii) $-\infty$.
(D) (i) $-7/10$; (ii) $+\infty$.
2. (A) (i) e^{-21} ; (ii) 0 .
(B) (i) $e^{5/3}$; (ii) $1/\sqrt{7}$.
(C) (i) 1 ; (ii) $\log 2$.
(D) (i) 0 ; (ii) 1 .
3. (A) (i) a_n è somma di due successioni: la seconda converge a 7 ; la prima si può scrivere $\frac{n^2(1+\sin n)}{n^2(1+\frac{\sqrt{n}}{n^2})} \sim 1 + \sin n$ il cui limite non esiste. Pertanto, non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
(ii) il limite è zero.
(B) (i) $\{a_n\}$ si scrive come somma di due successioni: la prima converge a 1 , la seconda converge a 7 . Pertanto il limite è 8 ; (ii) $+\infty$.
(C) (i) $\{a_n\}$ si scrive come somma di due successioni: la seconda converge a -8 , la prima è indeterminata, analogamente alla prima succ. dell' es. (A)-(i). Pertanto, non esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (ii) 1 .
(D) (i) $\{a_n\}$ si scrive come somma di due successioni: la prima converge a 1 , la seconda converge a 8 . Pertanto il limite è 9 ; (ii) $+\infty$.
4. (A) Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 7\sqrt{n}) / (n^2 \log n) = 0$; dalla definizione di limite si ha allora che, scelto ad esempio $\epsilon = 1$, esiste in corrispondenza un numero naturale ν tale che per $n > \nu$ si ha $(n^2 + 7\sqrt{n}) / (n^2 \log n) < 1$ il che significa che $n^2 + 7\sqrt{n} < n^2 \log n$ definitivamente.
(B) Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} / (5/n^{100}) = 0$; dalla definizione di limite si ha allora che, scelto ad esempio $\epsilon = 1$, esiste in corrispondenza un numero naturale ν tale che per $n > \nu$ si ha $2^{-n} / (5/n^{100}) < 1$ il che significa che $2^{-n} < 5/n^{100}$ definitivamente.
(C) Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^n + 3) / (\sqrt{2}n!) = 0$; dalla definizione di limite si ha allora che, scelto ad esempio $\epsilon = 1$, esiste in corrispondenza un numero naturale ν tale che per $n > \nu$ si ha $(e^n + 3) / (\sqrt{2}n!) < 1$ il che significa che $e^n + 3 < \sqrt{2}n!$ definitivamente.
(D) Risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^{-n} / (10/\log n) = 0$; dalla definizione di limite si ha allora che, scelto ad esempio $\epsilon = 1$, esiste in corrispondenza un numero naturale ν tale che per $n > \nu$ si ha $7^{-n} / (10/\log n) < 1$ il che significa che $7^{-n} < 10/\log n$ definitivamente.
5. (A) $\text{dom} f = [2, +\infty)$; (B) $\text{dom} f = [3, +\infty)$; (C) $\text{dom} f = [2, +\infty)$; (D) $\text{dom} f = [3, +\infty)$.
6. (A) Risulta $\lim a_n = 0$. Si ha poi : $\max A = \sup A = 3$; $\inf A = 0$, non esiste $\min A$; 0 è punto di accumulazione di A che, quindi, non è discreto.
(B) La successione non ha limite. Si ha poi: $\sup A = +\infty$; $\inf A = \min A = 0$, non esiste $\max A$; A non ha punti di accumulazione, pertanto è discreto.

(C) Risulta $\lim a_n = 0$. Si ha poi: $\sup A = 3/14 = \max A$; $\inf A = \min A = 0$; 0 è punto di accumulazione di A che, quindi, non è discreto.

(D) La successione non ha limite. Si ha poi: $\sup A = +\infty$; $\inf A = \min A = 0$, non esiste $\max A$; A non ha punti di accumulazione, pertanto è discreto.

7. (A), (C) $f(x)$ è crescente per $x \in \text{dom}(f)$, perché composizione di funzioni crescenti.

(B), (D) $f(x)$ è decrescente per $x \in \text{dom}(f)$, perché composizione di funzioni decrescenti. Quindi f è iniettiva.

8. (A) $f(x)$ è decrescente, quindi iniettiva, e surgettiva, dunque è biunivoca ed esiste f^{-1} . Si ha $f^{-1}(y) = 2^{3-y} - 1$ e $f^{-1}(0) = 7$.

(B) $f(x)$ è decrescente, quindi iniettiva, e surgettiva, dunque è biunivoca ed esiste f^{-1} . Si ha $f^{-1}(y) = -3 - \log(y - 5)$ e $f^{-1}(6) = -3$.

(C) $f(x)$ è crescente, quindi iniettiva, e surgettiva, dunque è biunivoca ed esiste f^{-1} . Si ha $f^{-1}(y) = (\log(y - 811))^2$ e $f^{-1}(12) = 0$.

(D) $f(x)$ è decrescente, quindi iniettiva, e surgettiva, dunque è biunivoca ed esiste f^{-1} . Si ha $f^{-1}(y) = (\log(y + 8))^2$ e $f^{-1}(-7) = 0$.

9. Per le definizioni, si consulti un qualunque libro di testo o gli appunti delle lezioni.

(A) la successione è di Cauchy, poiché è convergente a zero. (B) la successione non è indeterminata, in quanto diverge a $+\infty$. (C) la successione è costantemente zero, pertanto è convergente a zero. (D) la successione non è divergente, poiché converge a zero.