Dunque:

$$P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{tx}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{tx} f(x,y)dy.$$

Derivando tale espressione rispetto a t, si ottiene la densità di Z :

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx\ (-xf(x,tx)) + \int_{0}^{+\infty} dx\ (xf(x,tx)) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x,tx)dx.$$

▷ **Esercizio** 2.66

Denotiamo come al solito con $f(x,y)$ la densità congiunta di (X,Y). Posto $Z = XY$, calcoliamo $P(Z \leq t)$; consideriamo i due casi.
(i) $t \geq 0$

$$P(XY \leq t) = \int\int_{E_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy + \int\int_{Q_1 \cup Q_2} f(x,y)dxdy$$

ove E_1, E_2, Q_1 e Q_2 sono gli insiemi indicati in figura 5.

Allora:

$$P(XY \leq t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{t/x}^{0} dy f(x,y) + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{0}^{t/x} dy f(x,y)$$
$$+ \int\int_{Q_1 \cup Q_2} f(x,y)dxdy$$

Si osservi che l'integrale doppio esteso a $Q_1 \cup Q_2$ non dipende da t. Derivando rispetto a t si ottiene la densità di $Z = XY$ per $t \geq 0$:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx \left[-f\left(x, \frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}\right] + \int_{0}^{+\infty} dx \left[f\left(x, \frac{t}{x}\right)\frac{1}{x}\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx\ .$$

(ii) $t < 0$

$$P(XY \leq t) = \int\int_{F_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{F_2} f(x,y)dxdy$$

(v. figura 5).

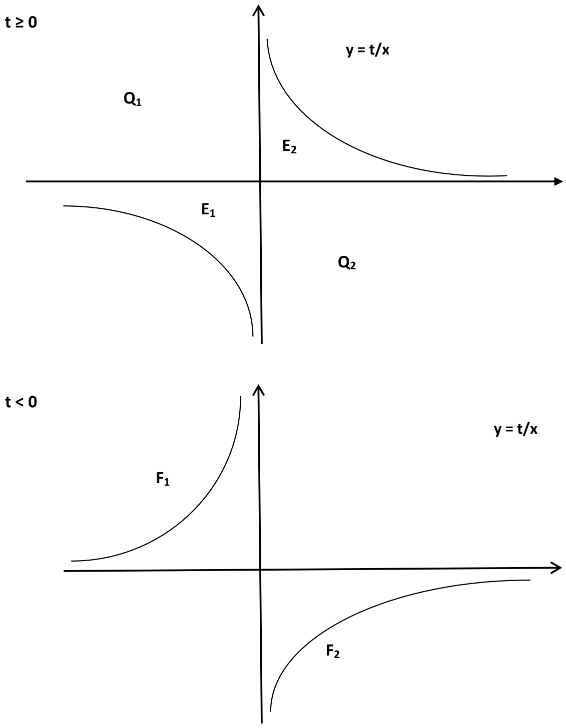

Figura 5

Allora:

$$P(XY \leq t) = \int_{-\infty}^{0} dx \int_{t/x}^{+\infty} dy f(x,y) + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{t/x} dy f(x,y)$$

Derivando rispetto a t si ottiene la densità di $Z = XY$ per $t < 0$:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} dx f\left(x, \frac{t}{x}\right) \cdot \frac{(-1)}{x} + \int_{0}^{+\infty} dx f\left(x, \frac{t}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{t}{x}\right) dx \ .$$

Concludendo, per ogni $z \in (-\infty, +\infty)$ la densità di $Z = XY$ è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \ .$$