Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
Prova scritta del 7 settembre 2022

Punteggi: **1:** $3+3+3$; **2:** $3+4+3+3$; **3:** $4+4$.

1. Un'urna contiene 4 bottoni verdi e 7 rossi. Vengono effettuate estrazioni casuali di un bottone alla volta, senza reinserimento.
(i) Qual è la probabilità che i primi due bottoni estratti siano entrambi verdi?
(ii) Qual è la probabilità che il secondo e il terzo estratto siano entrambi verdi, sapendo che il primo estratto era rosso? E se il primo estratto fosse stato verde?
(iii) Qual è la probabilità di estrarre la sequenza di bottoni $(rosso, rosso, verde)$, in quest'ordine ?

2. (6 CFU) Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta:

$$f(x,y) = \frac{6}{5}(x^2+y)\,\mathbf{1}_{(0,1)^2}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x^2+y) & \text{se } x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y e calcolare $cov(X,Y)$. Dire se X e Y sono indipendenti. Trovare una diversa densità congiunta, avente le stesse marginali.
(ii) Calcolare $P(2X < Y)$ e $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$.
(iii) Trovare la densità di $Z = XY$.
(iv) Se $W = \ln Z$, trovare la densità di W e calcolare $P(W \leq -1)$.

3. Supponiamo che il peso V delle spigole cresciute in un certo allevamento commerciale abbia distribuzione normale con media μ incognita, e deviazione standard $\sigma = 0.09$ kg.
(i) Analizzando un campione casuale di 100 spigole, si trova che il peso medio campionario è 1.3 kg. Trovare un intervallo di confidenza al livello $1-\alpha = 0.99$ per la media μ incognita.
(ii) Se fosse precisamente $\mu = 1.3$, quanto varrebbe $P(|V-\mu| \geq 2\sigma)$?

Soluzioni dell' appello del 7 Settembre 2022
di Calcolo delle Probabilità e Statistica

1. (i) Denotiamo con V_{12} l'evento "il primo e il secondo bottone estratti sono entrambi verdi". Utilizzando la distribuzione ipergeometrica, si ha:

$$P(V_{12}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{0}}{\binom{11}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 10} = 0.11 \ .$$

(ii) Siano V_1 e R_1, rispettivamente, gli eventi "il primo bottone estratto è verde" e "il primo bottone estratto è rosso". Denotiamo con V_{23} l'evento "il secondo e il terzo bottone estratti sono verdi". Se il primo bottone estratto è rosso, nella scatola sono rimasti 4 bottoni verdi e 6 rossi. Usando sempre la distribuzione ipergeometrica, si ottiene:

$$P(V_{23}|R_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9} = 0.13 \ .$$

Analogamente:

$$P(V_{23}|V_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 9} = 0.067 \ .$$

(iii) Si ha:

$$P(R_1 \cap R_2 \cap V_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(V_3|R_1 \cap R_2) = 7/11 \cdot 6/10 \cdot 4/9 = 28/165 \cong 0.17$$

2. (i) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + y)dy = \frac{6}{5}(x^2 + \frac{1}{2}) \ , x \in (0,1),$$

mentre $f_X(x)$ è zero per $x \notin (0,1)$.

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^2 + y)dx = \frac{6}{5}(y + \frac{1}{3}) \ , y \in (0,1),$$

mentre $f_X(y)$ è zero per $y \notin (0,1)$. Poiché $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, le v.a. X e Y non sono indipendenti.

Si ha:

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{6}{5}(x^2+y)xy$$
$$= ... = \frac{7}{20}$$

Inoltre

$$E(X) = \int_0^1 \left(\frac{6}{5}x^3 + \frac{3x}{5}\right) dx = \frac{3}{5}$$
$$E(Y) = \int_0^1 \left(\frac{6}{5}y^2 + \frac{2y}{5}\right) dy = 1$$

Pertanto $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 7/20 - (3/5) = -1/4$.
Una diversa densità congiunta con le stesse marginali si ottiene considerando la funzione

$$g(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{36}{25}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)\mathbf{1}_{(0,1)^2}(x,y).$$

(ii) Si ha:

$$P(2X < Y) = \int_0^{1/2} dx \int_{2x}^1 dy \frac{6}{5}(x^2+y) = ... = \frac{17}{80}.$$
$$P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2) = \int_0^{1/2} dx \int_0^{1/2} dy \frac{6}{5}(x^2+y) = ... = \frac{1}{10}.$$

(iii) La v.a. $Z = XY$ assume valori in $(0,1)$; si può procedere calcolando la funzione di distribuzione di Z mediante il calcolo di un integrale doppio, e poi derivare per ottenere la densità di Z, oppure utilizzando il cambio di variabili che fornisce la ben nota formula

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, z/x) dx;$$

si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} \cdot \frac{6}{5}\left(x^2 + \frac{z}{x}\right)\mathbf{1}_{(0,1)^2}(x, z/x) dx;$$

Dovendo essere $x \in (0,1)$ e $0 < z/x < 1$, ovvero $0 < z < x$, l'integrale diventa

$$= \int_z^1 \frac{1}{x}\frac{6}{5} \cdot \left(x^2 + \frac{z}{x}\right) dx = \frac{6}{5}\Big[x^2/2 - z/x\Big]_{x=z}^{x=1} = \frac{6}{5}(3/2 - z - z^2/2)$$

Dunque:

$$f_Z(z) = \frac{6}{5}(3/2 - z - z^2/2), \; z \in (0,1),$$

mentre è zero per $z \notin (0,1)$.

(iv) $W = \ln Z \in (-\infty, 0)$ e per $t < 0$, risulta

$$P(W \le t) = P(Z \le e^t)$$

Derivando, si ottiene la densità di W :

$$f_W(t) = f_Z(e^t)e^t = e^t \cdot \frac{6}{5}(3/2 - e^t - e^{2t}/2), \ t < 0$$

Infine:

$$P(W \le -1) = P(Z \le e^{-1}) = \int_0^{e^{-1}} \frac{6}{5}(3/2 - z - z^2/2)dz = \frac{6}{5}\left(\frac{3}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{6}e^{-3}\right).$$

3. (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, e la media campionaria è $\bar{x} = 1.3$; inoltre, da $1 - \alpha = 0.99$ segue $1 - \alpha/2 = 0.995$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per il peso medio delle spigole del campione, al livello 0.99 è:

$$I = \left[1.3 - \frac{0.09}{10} \cdot 2.58, \ 1.3 + \frac{0.09}{10} \cdot 2.58\right] = [1.276, \ 1.323] \ .$$

(ii) Si ha:

$$P(|V - 1.3| \ge 2 \cdot 0.09) = 1 - P(|V - 1.3| < 2 \cdot 0.09) =$$

$$= 1 - P(-2 \cdot 0.09 < V - 1.3 < 2 \cdot 0.09) = 1 - P(-2 \cdot 0.09/0.09 < (V - 1.3)/0.09 < 2 \cdot 0.09/0.09)$$

$$= 1 - (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 2(1 - \Phi(2)) = 2(1 - 0.9772) = 0.0456$$