Complementi di Probabilità e Statistica
Laurea Magistrale Ing. Info.
Soluzione degli Esercizi su catene di Markov a tempo continuo M. Abundo

1. Si può modellizzare il sistema mediante una coda del tipo $M/M/n$ modificata nel seguente modo.
Si considera un processo di nascita e morte con:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{se } k \le 5 \\ 0 & \text{se } k > 5 \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{se } k = 1, \ldots, s \\ s\mu & \text{se } k = s+1, \ldots, s+N \\ 0 & \text{se } k > s+N \end{cases}$$

Si osservi che la usuale coda $M/M/n$ si ottiene per $N \to \infty$.

Posto $\rho = \lambda/\mu$, procedendo come per la coda $M/M/n$, si trova per la distribuzione stazionaria:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!}\pi_0 & \text{se } k \le s \\ \frac{\rho^k}{s!s^{k-s}}\pi_0 & \text{se } k = s+1, \ldots, s+N \\ 0 & \text{se } k > s+N \end{cases}$$

La condizione di normalizzazione $\sum_k p_k = 1$ diventa

$$\pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=s+1}^{s+N} \frac{\rho^k}{s!s^{k-s}} \right) = 1$$

Ponendo $j = k - s - 1$, la seconda somma si può riscrivere:

$$\frac{1}{ss!}\rho^{s+1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\rho}{s}\right)^j =$$

$$= \frac{1}{s!}\rho^s \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\rho}{s}\right)^i$$

Pertanto:

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \frac{\lambda^s}{s!\mu^s} \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda^i}{\mu^i s^i} \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^i \right)^{-1}.$$

Ponendo $i - 1 = j$, la seconda somma diventa

$$\frac{\rho^{s+1}}{ss!} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^j = \frac{\rho^{s+1}}{ss!} \frac{1-(\rho/s)^N}{1-\rho/s} = \frac{\rho^{s+1}}{s!} \frac{1-(\rho/s)^N}{s-\rho}.$$

Si ottiene infine:

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!} \frac{1-(\rho/s)^N}{s-\rho} \right)^{-1}.$$

Volendo calcolare esplicitamente la distribuzione stazionaria per $s = 3$, $N = 2$ e $\lambda = 1$, $\mu = 2$, possiamo alternativamente procedere come segue. Risulta:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{se } k \leq 5 \\ 0 & \text{se } k > 5 \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{se } k = 1, 2, 3 \\ 3\mu & \text{se } k = 4, 5 \\ 0 & \text{se } k > 5 \end{cases}$$

Cerchiamo la distribuzione stazionaria come soluzione dell'equazione di bilancio:

$$\pi_k \lambda_k = \pi_{k+1} \mu_{k+1}$$

ovvero

$$\pi_k \lambda = \pi_{k+1} \mu_{k+1}$$

Esplicitando per i vari valori di k, otteniamo:

$$\begin{cases} \pi_0 \lambda = \pi_1 \mu \\ \pi_1 \lambda = \pi_2 \cdot 2\mu \\ \pi_2 \lambda = \pi_3 \cdot 3\mu \\ \pi_3 \lambda = \pi_4 \cdot 3\mu \\ \pi_4 \lambda = \pi_5 \cdot 3\mu \end{cases}$$

La prima equazione fornisce $\pi_1 = \pi_0 \rho$; sostituendo nella seconda si ottiene $\pi_2 = \frac{1}{2}\rho^2 \pi_0$; sostituendo nella terza: $\pi_3 = \frac{1}{3!}\rho^3 \pi_0$; sostituendo nella quarta: $\pi_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3!}\rho^4 \pi_0$; infine, sostituendo nell'ultima: $\pi_5 = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3!}\rho^5 \pi_0$.

Riassumendo:

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^k}{k!} & \text{se } k \leq 3 \\ \pi_0 \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} & \text{se } k = 4, 5 \\ 0 & \text{se } k > 5 \end{cases}$$

Imponendo la condizione $\sum \pi_k = 1$, si ottiene:

$$\pi_0 = [1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6 + \rho^4/18 + \rho^5/54]^{-1}$$

2. (i) + (ii)

Posto $\rho = \lambda/\mu$, si ottiene $\rho = \frac{1}{2} < 1$; dunque è soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza della distribuzione stazionaria. La sua legge, come si sa dalla teoria, è geometrica di parametro $1 - \rho$, cioé $\pi_k = \rho^k(1 - \rho)$. Quindi $P(X(\infty = 0)) = \pi_0 = 1 - \rho = \frac{1}{2}$.

(iii) Ricordando le formule per media e varianza di una v.a. con distribuzione geometrica, si ottiene:

$$E(X(\infty)) = \frac{1 - (1 - \rho)}{1 - \rho} = \frac{\rho}{1 - \rho} = 1$$

$$Var(X(\infty)) = \frac{1-(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 2$$

(iv) Si ha:

$$P(4 \leq X(\infty) < 7) = P(X(\infty) = 4) + P(X(\infty) = 5) + P(X(\infty) = 6) =$$

$$(1-\rho)(\rho^4 + \rho^5 + \rho^6) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]$$

(v) In tal caso sarebbe $\rho = \lambda/\mu = 2 > 1$ e non sarebbe verificata la condizione necessaria per l'esistenza della distribuzione all'equilibrio.

3. (i) + (ii) Per una coda $M/M/\infty$ la distribuzione stazionaria esiste sempre ed è $\pi_k = \frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}$, ove $\rho = \lambda/\mu$. Nel caso presente risulta $\rho = 1$, quindi si ottiene $\pi_k = \frac{1}{k!}e^{-1}$. Inoltre $P(X(\infty) = 0) = \pi_0 = e^{-1}$.
(iii) Siccome la distribuzione stazionaria è di Poisson di parametro ρ, risulta $E(X(\infty)) = Var(X(\infty)) = \rho = 1$.
(iv) $P(3 < X(\infty) \leq 5) = \pi_4 + \pi_5 = e^{-1}\left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)$.

4. (i) Dalla teoria si ha:

$$P(X(\infty) = 0) = \pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$$

Sostituendo $\rho = \lambda/\mu = 1/2$ e $n = 7$, si ottiene

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{2^k k!} + \frac{(1/2)^8}{7!(13/2)}\right]^{-1}$$

(ii) La condizione per l'esistenza della distribuzione stazionaria è $\rho < n$, cioé $1/2 < 7$, che è verificata. Dalla teoria, si ha poi:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k k!}\pi_0 & \text{se } k \leq 7 \\ \frac{1}{2^k 7! 7^{k-7}}\pi_0 & \text{se } k \geq 8 \end{cases}$$

(iii) $P(X(\infty = 4)) = \pi_4 = \pi_0 \frac{1}{24 \cdot 16}$.

5. (i) visto che $\lambda = 1$ e $\mu = 1/2$, dalla teoria segue che il numero medio di clienti nel sistema è $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 1$.
(ii) il numero medio di clienti in attesa nelle code è $L_c = \lambda^2/[\mu(\mu - \lambda)] = 1/2$.
(iii) il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema è: $W = 1/(\mu - \lambda) = 1$.
(iv) il tempo medio di attesa di un cliente nella coda è : $W_c = \lambda/[\mu(\mu - \lambda)] = 1/2$.

6. (i) + (ii) Si sa che

$$\begin{cases} W = \frac{1}{\mu-\lambda} = 2 \\ W_c = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema nelle incognite λ e μ, si ottiene $\lambda = 1/2$ e $\mu = 1$. Dalla teoria delle code $M/M/1$ si ha $\pi_k = \rho^k(1-\rho)$ con $\rho = \lambda/\mu = 1/2$, ovvero la distribuzione stazionaria è geometrica di parametro $1-\rho = 1/2$.
(iii) Dalle formule per la media e la varianza di una v.a. geometrica, si ottiene:

$$E(X(\infty)) = \frac{1-(1-\rho)}{1-\rho} = 1,\ Var(X(\infty)) = \frac{1-(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = 2$$

(iv) $P(5 \leq X(\infty) < 8) = \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7}\right)$.

7. Nella coda $M/M/\infty$ la distribuzione stazionaria è di Poisson di parametro ρ, ovvero $\pi_k = e^{-\rho}\rho^k/k!$; dunque:
(i) $L = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \rho = \lambda/\mu$.
(iii) dalla prima relazione di Little, $W = L/\lambda = 1/\mu$.
(iv) dalla relazione $W_c = W - 1/\mu$, si ottiene $W_c = 0$
(i) dalla seconda relazione di Little, $L_c = \lambda W_c = 0$.

8. Per una coda $M/M/n$ si ha che il numero medio di clienti in attesa nelle code è

$$L_c = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)\pi_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\pi_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)\frac{\rho^k}{n!n^{k-n}}\pi_0$$

Posto $k-n=h$, la serie diventa

$$\frac{\rho^n\pi_0}{n!}\sum_{h=1}^{\infty} h(\frac{\rho}{n})^h$$

Siccome, per $|q| < 1$ risulta $\sum_{h=0}^{\infty} q^h = \frac{1}{1-q}$, derivando termine a termine, si trova:

$$\sum_{h=1}^{\infty} hq^{h-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^{\infty} hq^h = q \cdot \sum_{h=1}^{\infty} hq^{h-1} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Per $q = \rho/n$, riprendendo il calcolo, si trova:

$$L_c = \frac{\rho^n\pi_0}{n!}\frac{(\frac{\rho}{n})}{(1-\frac{\rho}{n})^2} =$$

(per le relazioni di Little)

$$= \lambda W_c = \lambda(W - 1/\mu)$$

Da ciò segue che

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{n\rho^{n+1}\pi_0}{n!(n-\rho)^2}\right] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\rho^{n+1}\pi_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}\right]$$

9. Ogni cassiera serve un cliente ogni 2 minuti, quindi il tasso di servizio è $\mu = 1/2$ (clienti/min), mentre il tasso di arrivo è $\lambda = 10$ (clienti/min). Modelizzando com una coda $M/M/n$, affinché esista la distribuzione invariante, posto $\rho = \lambda/n$, deve essere $\rho < n$, cioé $\lambda/\mu < n$ che fornisce $n > 20$, ovvero si può scegliere, al minimo, $n = 21$.
(i) Occorre imporre che il tempo medio di attesa globale sia inferiore a 5 min., cioé $W < 5$. L'espressione per W è stata ricavata nell' esercizio **8.**, ed è:

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{n\rho^{n+1}\pi_0}{n!(n-\rho)^2}\right] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\rho^{n+1}\pi_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}\right],$$

dove, come noto dalla teoria:

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1} \qquad (*)$$

Dunque, per $\lambda = 10$, $\mu = 1/2$, e $\rho = 20$, occorre imporre che

$$2 + \frac{1}{10}\left(\frac{20^{n+1}\pi_0}{(n-1)!(n-20)^2}\right) < 5 \qquad (**)$$

dove, per ogni n, π_0 è calcolato mediante (*) con $\rho = 20$.
Procedendo per tentativi, calcolando l'espressione di sopra per $n = 21,\ 22, \ldots$ (con un computer si tratta di un'operazione immediata), si trova che il primo intero n per cui (**) è verificata è $n = 34$; concludiamo, quindi, che il numero minimo di casse da predisporre affinché il tempo di attesa globale sia inferiore a 5 minuti è $n = 34$.
(ii) Introducendo le casse veloci, per quelle normali il λ è pari a 7, il μ è pari a 1/2, e $\rho = 14$, quindi, se n_1 è il numero di casse normali, procedendo come in (i), occorre imporre che

$$2 + \frac{1}{7}\left(\frac{14^{n+1}\pi_0}{(n-1)!(n-14)^2}\right) < 5.$$

che fornisce, procedendo per tentativi, $n_1 \geq 24$.
(iii) Per le casse veloci il λ è pari a 3, il μ è pari a 2, e $\rho = 3/2$, quindi, se n_2 è il numero di casse veloci, la condizione affinché il tempo medio di attesa e servizio alle casse veloci sia minore di 4 min, diventa:

$$1/2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(1.5)^{n+1}\pi_0}{(n-1)!(n-1.5)^2}\right) < 4,$$

che fornisce, procedendo per tentativi, $n_2 \geq 2$.
Quindi, se si introducono le casse veloci, invece di 34 casse, se ne possono usare 26, di cui 2 veloci.

10.

(i) Richiamiamo le seguenti formule, riguardanti la funzione rischio di guasto istantaneo $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{d}{dt}\log(1 - F(t)) \qquad (*)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)du}; \quad S(t) = 1 - F(t) \qquad (**)$$

dove $F(t) = P(T \leq t)$ è la funzione di distribuzione di T, $S(t)$ è la *funzione di sopravvivenza* e $f(t) = F'(t)$ è la sua densità. Nel nostro caso, derivando l'espressione assegnata per $F(t)$, si ottiene la densità $f(t)$ di T :

$$f(t) = abt^{b-1}e^{-at^b},$$

e quindi, sostituendo nella formula $(*)$, l'intensità di guasto istantaneo è:

$$\lambda(t) = \frac{abt^{b-1}e^{-at^b}}{e^{-at^b}} = abt^{b-1}.$$

Si noti che $\lambda(t)$ risulta una funzione crescente di t se $b > 1$, decrescente se $b > 1$; se $b = 1$ si ottiene $\lambda(t) = a = costante$.

(ii) Se $b = 1$ si ha $\lambda(t) = a$; usando $(**)$ si ricava

$$F(t) = 1 - e^{-at},$$

ovvero T è una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro a.

11.

(i) Se i componenti sono collegati in serie, si ha $T = \min(T_1, T_2)$. Dunque, per la funzione di sopravvivenza dell'apparecchiatura con tempo di vita T, si ha:

$$S_{1,2}(t) = 1 - F_{1,2}(t) = P(T > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) =$$

$$= P(T_1 > t)P(T_2 > t) = S_1(t)S_2(t).$$

Dalla formula per il rischio istantaneo di guasto:

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{d}{dt}\log S_{1,2}(t) \ ,$$

si ottiene:

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{d}{dt}\log(S_1(t)S_2(t)) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\log S_1(t) - \frac{d}{dt}\log S_2(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \ ,$$

ovvero, in accordo con l'intuizione, i rischi di guasto si sommano, visto che nel collegamento in serie, se uno dei due componenti si guasta, l'intero sistema cessa di funzionare.

(ii) Se si collegano i due componenti in parallelo, si ha: $T = \max(T_1, T_2)$. In tal caso, risulta:

$$F_{1,2}(t) = P(T \le t) = P(T_1 \le t, T_2 \le t) =$$

$$= P(T_1 \le t)P(T_2 \le t) = F_1(t)F_2(t).$$

Quindi, essendo $F_1(t), F_2(t) \in [0,1]$, si ottiene:

$$F_{1,2}(t) \le F_1(t), \quad F_{1,2}(t) \le F_2(t).$$

Allora: $S_{1,2}(t) = 1 - F_{1,2}(t) \ge 1 - F_1(t) = S_1(t)$, e analogamente
$S_{1,2}(t) \ge 1 - F_2(t) = S_2(t)$. Come naturale, la funzione di sopravvivenza dell' apparecchiatura composta dai due componenti collegati in parallelo risulta $\ge$ di quelle dei due singoli componenti.
Il rischio di guasto ora è più complicato da calcolare; si ha:

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{d}{dt}\log S_{1,2}(t) = -\frac{d}{dt}\log(1 - F_1(t)F_2(t)) =$$

$$= \frac{f_1(t)F_2(t) + f_2(t)F_1(t)}{1 - F_1(t)F_2(t)} \ .$$

12.
Per la funzione di sopravvivenza del prodotto commerciale si ha:

$$S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du} = e^{-\int_0^t 2u^{3/2}du} =$$

$$= e^{-\frac{2}{5}t^{5/2}}.$$

(i) Si ottiene

$$S(2) = e^{-\frac{2}{5}2^{5/2}} = e^{-\frac{8\sqrt{2}}{5}} \cong 0.104 \ .$$

(ii) La probabilità cercata è:

$$P(0.5 \le T \le 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = 1 - S(1.5) - (1 - S(0.5)) =$$

$$= S(0.5) - S(1.5) = e^{-\frac{2}{5}(\frac{1}{5})^{5/2}} - e^{-\frac{2}{5}(\frac{3}{2})^{5/2}} \cong 0.6607 \ .$$