Processi Stocastici e Analisi di Serie Temporali A.A. 2018/19

Prova scritta del

Esercizio 1. (i) Siano A e B matrici stocastiche; mostrare che, per ogni $t \in [0,1]$ la matrice $Q = tA + (1-t)B$ è stocastica.

Si consideri la CM a tempo discreto, omogenea, con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$ e matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{pmatrix}$$

(ii) Classificare gli stati della CM e trovare eventuali stati periodici.

(iii) Trovare la/e distribuzione invariante/i della CM e quella stazionaria, se esiste. Si tratta di una distribuzione reversibile?

(iv) Stimare approssimativamente il valore della frazione

$$\frac{P(X_{11379} = 2)}{P(X_{9076} = 1)}$$

(v) Calcolare il minimo intero k per cui risulta $|p_{12}^{(k)} - \frac{1}{4}| < 10^{-3}$.

Esercizio 2. Siano $X_i(t),\ i = 1, \ldots, n$, processi di Poisson indipendenti con intensità $\lambda_i = i$. Posto $X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$, trovare n in modo che $E(X(2)) = 42$. Per il valore di n trovato, calcolare:

(i) $P\left(1 \leq X(\frac{1}{21}) < 5\right)$;

(ii) $P(X(t) < 5 | X(t) > 2)$ per ogni $t > 0$;

(iii) $P\left(\frac{1}{42} < \tau \leq \frac{1}{21}\right)$, dove τ denota il primo istante in cui $X(t) > 0$;

(iv) il primo istante t a partire dal quale risulta $Var(X(t)) > 112$.

(sugg.: si ricordi che la somma di v.a. di Poisson indipendenti di intensità λ_i è ancora una v.a. di Poisson di intensità $\sum_i \lambda_i$.)

(v) Si consideri un processo stocastico stazionario a media mobile di ordine 1, MA(1), della forma $y_t = \eta + u_t + \theta u_{t-1}$, dove $\eta = E(y_t),\ u_t$ è white noise, e $\theta = -0.4$. Calcolare le autocovarianze e le autocorrelazioni al ritardo k. Scrivere, inoltre, la funzione spettrale $g(\omega)$ e la densità spettrale $f(\omega)$ di y_t; la densità spettrale è una funzione crescente, o decrescente di ω?

Esercizio 3. Si consideri una CM $X(t)$ a tempo continuo, omogenea con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$, ed avente per generatore una matrice Q, non nota. Si consideri inoltre la CM $\widehat{X}(n)$ a tempo discreto, accelerata, ottenuta da $X(t)$ trascurando i tempi di permanenza negli stati, avente per matrice di probabilità di transizione

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in (0,1)$$

(a) Trovare la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ di $\widehat{X}$, se esiste.

(b) Determinare il generatore Q della CM X in modo che il tempo di permanenza nello stato 1 abbia distribuzione esponenziale di parametro 2, e inoltre la distribuzione stazionaria π di X coincida con la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ di $\widehat{X}$.

(c) Per $\alpha = 1/3$, calcolare approssimativamente $P(0.1)$.

Processi Stocastici e Analisi di Serie Temporali
Soluzioni della prova di scritta del

1. (i) Risulta $Q = tA + (1-t)B \geq 0$, inoltre $\sum_j Q_{ij} = t\sum_j A_{ij} + (1-t)\sum_j B_{ij} = t + 1 - t = 1$, quindi Q è una matrice stocastica.
(ii) Gli stati sono tutti ricorrenti e non esistono stati periodici, poiché ad esempio $(P^2)_{ii}$ e $(P^3)_{ii}$ sono entrambi > 0, per ogni $i = 1, 2, 3$.
(iii) Si verifica subito che

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.167 & 0.5 \\ 0.167 & 0.375 & 0.458 \\ 0.25 & 0.229 & 0.52 \end{pmatrix} > 0$$

Quindi la CM è regolare ed esiste la distribuzione stazionaria $\pi = \pi P$. Effettuando il calcolo, si trova $\pi = (1/4, 1/4, 1/2)$.
Ricordiamo che (π_1, π_2, π_3) è reversibile se è verificata l'equazione del bilancio dettagliato, ovvero:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \ \forall i, j \in E$$

Come si controlla facilmente, tali relazioni sono soddisfatte, quindi $\pi = (1/4, 1/4, 1/2)$ è reversibile.
(iv) Per l'ergodicità si ha:

$$\frac{P(X_{11379} = 2)}{P(X_{9076} = 1)} \approx \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{1/4}{1/4} = 1.$$

(v) Per l'ergodicità si ha $\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \pi_2 = \frac{1}{4}$. Dalla dimostrazione del teorema ergodico, con $s = 2, \alpha = 0.167,\ \beta = (1-\alpha)^{1/s}$ segue che

$$|p_{12}^{(k)} - \pi_2| \leq 2\beta^{k-s}$$

ovvero

$$|p_{12}^{(k)} - \pi_2| \leq 2 \cdot (0.834)^{k/2}$$

ed imponendo che tale quantità sia minore di 10^{-3} si ha:

$$2 \cdot (0.834)^{k/2} < 10^{-3}$$

Estraendo il logaritmo:

$$\ln 2 + (k/2)\ln(0.834) < -3\ln(10),$$

ovvero

$$0.693 - (k/2) \cdot 0.1815 < -3 \cdot 2.302$$

che, risolta, fornisce $k > 83.73$. Allora il primo intero cercato è 84 (la convergenza della CM verso la stazionarietà è piuttosto lenta, poiché α è piuttosto piccola; ciò si vede anche calcolando il secondo autovalore $\lambda_2 = 0.439$, che è piuttosto grande).

2.
(i) $X(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$ è un processo di Poisson di intensità $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$. Dunque $E(X(t)) = \lambda t = n(n+1)t/2$. Se vogliamo che $E(X(2)) = 42$, deve essere $n(n+1) = 42$, da cui $n = 6$ (l'altra soluzione $n = -7$ si scarta).
Pertanto $X(t) \sim Poisson(21t)$ e

$$P\left(X(1/21) \in [1,5)\right) = P\left(X(1/21) \in \{1,2,3,4\}\right) = e^{-1}\left(1 + 1/2 + 1/6 + 1/24)\right) = 0.6284$$

(ii) Si ha

$$P(X(t) < 5 | X(t) > 2) = \frac{P(2 < X(t) < 5)}{P(X(t) > 2)} = \frac{P(X(t) = 3 + P(X(t) = 4)}{1 - P(X(t) \in \{0,1,2\})} = \frac{e^{-21t}\left[(21t)^3/6 + (21t)^4/24\right]}{1 - e^{-21t}\left[1 + 21t + (21t)^2/2\right]}$$

(iii) Siccome $\tau \sim esp(21)$, si ha $P\left(\frac{1}{42} < \tau \leq \frac{1}{21}\right) = e^{-1/2} - e^{-1} = 0.2386$
(iv) Siccome $Var(X(t)) = \lambda t = 21t$, affinché sia $Var(X(t)) > 112$, deve essere $21t > 112$, ovvero $t > 112/21 = 5.33$.

(v) Per un processo MA(1), $y_t = \eta + u_t + \theta u_{t-1}$ si ha:

$$\gamma_0 = cov(y_t, y_t) = Var(y_t) = (\theta_0^2 + \theta_1^2)\sigma^2 = (1+\theta^2)\sigma^2 \ \ (\theta_0 \equiv 1, \theta_1 \equiv \theta)$$

$$\gamma_1 = cov(y_t, y_{t-1}) = \theta_1 \sigma^2 = \theta\sigma^2$$

$$\gamma_k = 0, \ \text{se } k > q = 1$$

Pertanto, se $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$, si ha

$$\rho_k = \begin{cases} 1, \ k=0 \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, \ k=1 \\ 0, \ k>1 \end{cases} = \begin{cases} 1, \ k=0 \\ \frac{-0.4}{1+0.4^2} = -0.344, \ k=1 \\ 0, \ k>1 \end{cases}$$

Per $\omega \in [0, \pi]$, lo spettro risulta

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}[\gamma_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k)] = \frac{1}{2\pi}[(1+\theta^2)\sigma^2 + 2\theta\sigma^2\cos(\omega)] = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+2\theta\cos\omega).$$

La densità spettrale è:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2}\cos\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+\theta^2+2\theta\cos\omega}{1+\theta^2}\right).$$

La densità spettrale $f(\omega)$ è crescente per $\theta < 0$, decrescente per $\theta > 0$; siccome $\theta = -0.4 < 0$, f risulta crescente.

3. (a) Siccome $\widehat{P}$ è bistocastica, e inoltre $\widehat{P}^2 > 0$, la CM $\widehat{X}$ è regolare, esiste la distribuzione stazionaria ed è quella uniforme sugli stati, ovvero $\widehat{\pi} = (1/3, 1/3, 1/3)$.
(b) Deve essere

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}/-q_{11} & q_{13}/-q_{11} \\ q_{21}/-q_{22} & 0 & q_{23}/-q_{22} \\ q_{31}/-q_{33} & q_{32}/-q_{33} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha \in (0,1)$$

da cui segue che

$$q_{12} = -\alpha q_{11}, \ q_{13} = -(1-\alpha)q_{11}, \ q_{21} = -(1-\alpha)q_{22}, \ q_{23} = -\alpha q_{22}, \ q_{31} = -\alpha q_{33}, \ q_{32} = -(1-\alpha)q_{33}$$

Se, come richiesto, deve essere $q_{11} = -2$ e inoltre X e $\widehat{X}$ devono avere lo stesso comportamento all'equilibrio, ovvero i tempi medi di permanenza nei vari stati sono tutti uguali ($q_{11} = q_{22} = q_{33}$), si ottiene

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2\alpha & 2(1-\alpha) \\ 2(1-\alpha) & -2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 2(1-\alpha) & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Si ha $P(h) = Id + hQ + o(h)$ $, h \to 0^+$, pertanto, per $\alpha = 1/3$ si ha:

$$P(0.1) \approx Id + 0.1Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} -2 & 2/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/15 & 2/15 \\ 2/15 & 4/5 & 1/15 \\ 1/15 & 2/15 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Dal fatto che $P(h) > 0$ per $h > 0$ piccolo, segue, ad esempio, che $P(1) > 0$, per cui esiste la distribuzione stazionaria π per la CM X.