Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica A.A. 2018/19
Processi Stocastici e Analisi di Serie Temporali

compito scritto del 25 febbraio 2019

Punteggi: **1)** $5/3 \times 6$; **2)** $10/3 \times 3$; **3)** (9 CFU): $1+ 2.25 \times 4$;
totale = 30.

Esercizio 1. Si consideri la CM a tempo discreto ed omogenea su $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(i) Classificare gli stati della CM, individuando eventuali stati periodici.
(ii) Trovare la/e distribuzione/i iniziale/i ν in modo che, detta $w = P(X_2 = i)$, $i = 1, 2, 3$, risulti $w = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
(iii) Relativamente alle distribuzioni iniziali trovate, calcolare $P(X_3 = i)$, $i = 1, 2, 3$.
(iv) Calcolare $p_{2j}^{(n)}$, $j \in E$.
(v) Calcolare i tempi medi di primo ritorno nei vari stati, m_i, se essi sono ben definiti, e provare che esiste un intero k tale che, se $n \geq k$ risulta $4^n|p_{ij}^{(n)} - 1/m_i| > 325$, per ogni i, j.
(vi) Stimare, per n grande, $P(X_{7n-3} = 1, X_{7n} = 3)$.

Esercizio 2. Si consideri una coda $M/M/1$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda > 0$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu > 0$, con $5\lambda\mu = 18$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$. Detto T il tempo che un cliente trascorre nel sistema in regime stazionario, supponiamo che $25[\ln(P(T > 3))]^2 = 9$.
(i) Discutere l'esistenza della distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$ e trovarne esplicitamente la legge.
(ii) Calcolare $P(X(\infty) \geq 2 | X(\infty) < 4)$ e $P(3 \leq T < 5)$.
(iii) Si consideri ora un'altra coda $M/M/1$, con parametri λ' e μ'. Sapendo che il numero medio di clienti nel sistema in regime stazionario è 1, che $(\lambda')^2 + (\mu')^2 < 4$, e che μ' è intero, trovare i parametri λ' e μ' e calcolare nel regime stazionario: a) il numero medio dei clienti in attesa nella coda; b)il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema; c) il tempo medio di attesa di un cliente in coda.

Esercizio 3. (i) Si consideri la CM a tempo continuo ed omogenea $Z(t)$ su $E = \{1, 2, 3\}$, con stati 1 e 3 assorbenti e tale che il generatore Q soddisfi $q_{21} = q_{23}$.
Trovare la/e distribuzione/i invariante/i e quella stazionaria, se esiste.
(ii) Per $\alpha \geq 1/3$, si consideri la CM a tempo continuo ed omogenea $X(t)$ su $E = \{1, 2, 3\}$, avente per generatore la matrice:

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -\alpha & \alpha - 1/3 \\ 1/3 & \alpha - 1/3 & -\alpha \end{pmatrix}$$

(a) Trovare il valore di α in modo che, detto R_2 il tempo residuo di permanenza nello stato 2, risulti $P(R_2 < 3 | R_2 > 1) = 1 - e^{-4}$.
(b) Per il valore di α trovato, calcolare la/e distribuzione/i invariante/i per $X(t)$ e, se esiste, quella stazionaria π.
(c) Per il valore di α trovato, calcolare approssimativamente le probabilità di transizione $p_{ij}(t)$ al tempo $t = 0.01$.
(d) Per il valore di α trovato, calcolare le probabilità di transizione $\widehat{p}_{ij}$ della CM a tempo discreto "accelerata", ottenuta da $X(t)$ trascurando il tempo di permanenza nei vari stati e trovare la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ associata a questa ultima CM. Calcolare $dist(\pi, \widehat{\pi})$; nel caso la distanza tra le due distribuzioni sia diversa da zero, spiegarne il motivo.

Processi Stocastici e Analisi di Serie Temporali a.a. 2018/19
Soluzioni della prova del

1. (i) Gli stati sono tutti ricorrenti. Inoltre, per $i = 1, 2, 3$, si verifica facilmente che $p_{ii}^{(2)} > 0$ e $p_{ii}^{(3)} > 0$, per cui, essendo 2 e 3 primi tra loro, non vi sono stati periodici
(ii) Si richiede di trovare le distribuzioni iniziali ν tali che $\nu P^2 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Posto $\nu = (\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$, essendo

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 4/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

imponendo $\nu P^2 = (1/3, 1/3, 1/3)$, si ottiene un sistema di equazioni nelle incognite α e β, che, risolto, fornisce $\alpha = \beta$; pertanto, esistono infinite distribuzioni iniziali ν che soddisfano la proprietà richiesta, del tipo $\nu = (\theta, \theta, 1-2\theta)$, $\theta \leq \frac{1}{2}$. Si osservi che, per $\theta = 1/3$, ad esempio, si ottiene la distribuzione uniforme, che è pure invariante, essendo P bistocastica.
(iii) Se $u_i = P(X_3 = i)$, si ha $u = (\theta, \theta, 1-2\theta) P^3$; visto che

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 8/27 & 10/27 \\ 1/3 & 10/27 & 8/27 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

effettuando i calcoli, si ottiene $u = (1/3, 1/3, 1/3)$.
(iv) Gli autovalori di P sono: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 0$.
Si ha:

$$p_{2j}^{(n)} = a_{2j} + b_{2j}(1/3)^n, \ n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Dalla formula di Chapman-Kolmogorov, oppure esaminando P^2, si ottiene:

$$p_{21}^{(2)} = 1/3, \ p_{22}^{(2)} = 4/9, \ p_{23}^{(2)} = 2/9 \ .$$

Sostituendo ora $n = 1$ e $j = 1$ nella relazione (1), si ottiene:

$$1/3 = p_{21} = a_{21} + b_{21}/3 \tag{2}$$

Sostituendo $n = 2$ e $j = 1$ in (1) si ottiene:

$$1/3 = p_{21}^{(2)} = a_{21} + b_{21}/9 \tag{3}$$

Risolvendo il sistema dato dalle equazioni (2), (3) nelle incognite a_{21}, b_{21}, si trova

$$a_{21} = \frac{1}{3}, b_{21} = 0$$

Pertanto, sostituendo in (1) si trova:

$$p_{21}^{(n)} = \frac{1}{3}$$

Sostituendo $n = 1$ e $j = 2$ nella relazione (1), si ottiene:

$$2/3 = p_{22} = a_{22} + b_{22}/3 \tag{4}$$

Sostituendo $n = 2$ e $j = 2$ in (1) si ottiene:

$$4/9 = p_{22}^{(2)} = a_{22} + b_{22}/9 \tag{5}$$

Risolvendo il sistema dato dalle equazioni (4), (5) nelle incognite a_{22}, b_{22}, si trova

$$a_{22} = \frac{1}{3}, b_{22} = 1/9$$

Pertanto, sostituendo in (1) si trova:

$$p_{22}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Sostituendo $n=1$ e $j=3$ nella relazione (1), si ottiene:

$$0 = p_{23} = a_{23} + b_{23}/3 \tag{6}$$

Sostituendo $n=2$ e $j=3$ in (1) si ottiene:

$$2/9 = p_{23}^{(2)} = a_{23} + b_{23}/9 \tag{7}$$

Risolvendo il sistema dato dalle equazioni (6), (7) nelle incognite a_{23}, b_{23}, si trova

$$a_{23} = \frac{1}{3}, b_{23} = -1$$

Pertanto, sostituendo in (1) si trova:

$$p_{23}^{(n)} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Riassumendo:

$$p_{21}^{(n)} = \frac{1}{3}\ ,\ p_{22}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n\ ,\ p_{23}^{(n)} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} p_{2j}^{(n)} = \pi_j = 1/3,\ j = 1,2,3$$

Ciò è in accordo col Teorema ergodico (la distribuzione stazionaria π esiste, poiché P è regolare, essendo $P^2 > 0$). Inoltre, siccome P è bistocastica, la distribuzione stazionaria è quella uniforme, ovvero $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.

(v) Visto che esiste la distribuzione stazionaria π, è ben definito il tempo medio di primo ritorno nello stato i, che vale $m_i = 1/\pi_i = 3,\ i = 1,2,3$. Inoltre, siccome $|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \sim cost \cdot \lambda_2^n = cost \cdot (1/3)^n$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} 4^n |p_{ij}^{(n)} - 1/m_i| = \lim_{n\to\infty} cost \cdot 4^n (1/3)^n = +\infty,\ \forall i,j;$$

dunque, definitivamente risulta $4^n|p_{ij}^{(n)} - 1/m_i| > 325$.

(vi) Si ha, per n grande:

$$P(X_{7n} = 3, X_{7n-3} = 1) = P(X_{7n} = 3 | X_{7n-3} = 1) P(X_{7n-3} = 1)$$

$$= p_{13}^{(3)} P(X_{7n-3} = 1) \approx p_{13}^{(3)} \pi_1 = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{81}\ .$$

2. (i)
Siccome T ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu - \lambda$, risulta $P(T > 3) = e^{-3(\mu-\lambda)}$ e quindi $\{\ln[P(T > 3)]\}^2 = 9(\mu - \lambda)^2$; imponendo la condizione $25\{\ln[P(T > 3)]\}^2 = 9$, si ottiene $(\mu-\lambda)^2 = 1/25$, da cui $\mu - \lambda = 1/5$ (la soluzione $\mu - \lambda = -1/5$ si scarta, altrimenti sarebbe $\mu < \lambda$ e non esisterebbe la distribuzione stazionaria). Mettendo a sistema con $5\lambda\mu = 18$, si ottiene infine $\lambda = 9/5,\ \mu = 2$. Per tali valori, posto $\rho = \lambda/\mu$, si ottiene $\rho = \frac{9}{10} < 1$ (esiste la distribuzione stazionaria). La sua legge, come si sa dalla teoria, è geometrica di parametro $1 - \rho$, cioé
$\pi_k = \rho^k(1-\rho) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^k$.
(ii)

$$P(X(\infty) \geq 2|X(\infty) < 4) = \frac{P(2 \leq X(\infty) < 4)}{P(X(\infty) < 4)} = \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3} = 0.4475138$$

Inoltre, T ha distribuzione esponenziale di parametro $1/5$, quindi $P(T \in [3, 5)) = \exp(-3\cdot 1/5) - \exp(-5\cdot 1/5) = 0.1809322$.
(iii) Deve essere $L = \lambda'/(\mu' - \lambda') = 1$, ovvero $\lambda' = \mu'/2$. La disuguaglianza $(\lambda')^2 + (\mu')^2 < 4$ e μ' intero, forniscono l'unica soluzione $\mu' = 1$ e $\lambda' = 1/2$. (a) dalla teoria segue che il numero medio di clienti in attesa nelle code è $L_c = (\lambda')^2/[\mu'(\mu' - \lambda')] = 1/2$. (b) il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema è: $W = E(T) = 1/(\mu' - \lambda') = 2$. (c) il tempo medio di attesa di un cliente nella coda è : $W_c = \lambda'/[\mu'(\mu' - \lambda')] = 1$.

3. (9 crediti) (i) Il generatore è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\alpha \geq 0$. Dall' equazione $\pi Q = 0$, si ricava che esistono infinite distribuzioni invarianti del tipo $\pi = (\theta, 0, 1-\theta)$ con $\theta \in [0, 1]$. La distribuzione stazionaria non esiste, poiché vi sono due stati assorbenti.
(ii) Si ha:

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -\alpha & \alpha - 1/3 \\ 1/3 & \alpha - 1/3 & -\alpha \end{pmatrix}$$

(a) Siccome R_2 ha distribuzione esponenziale di parametro $-q_{22} = \alpha$, si trova

$$P(R_2 < 3|R_2 > 1) = \frac{P(1 < R_2 < 3)}{P(R_2 > 1)} = \frac{e^{-\alpha} - e^{-3\alpha}}{e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha}\right)}{e^{-\alpha}} = 1 - e^{-2\alpha}$$

Imponendo che questa quantità sia uguale a $1 - e^{-4}$, si ottiene $\alpha = 2$. Dunque, per il valore di α trovato, il generatore è:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2 & 5/3 \\ 1/3 & 5/3 & -2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $Q^2 > 0$.
(b) La distribuzione invariante π è soluzione dell'equazione $\pi Q = 0$, con la condizione $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, ovvero:

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2 & 5/3 \\ 1/3 & 5/3 & -2 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} -\pi_1 + \pi_2/3 + \pi_3/3 = 0 \\ -2\pi_2 + 5\pi_3/3 = 0 \\ \pi_1 + 5\pi_2/3 - 2\pi_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione (normalizzata) è

$$\pi = \left(\frac{11}{44},\ \frac{15}{44},\ \frac{18}{44}\right) \approx (0.25,\ 0.3409,\ 0.4090)$$

La distribuzione trovata è anche stazionaria, come segue dal successivo punto (c), essendo $P(k) > 0$ per k piccolo; per $t > 0$, se n è opportunamente grande, $k = t/n$ è piccolo quanto si vuole, inoltre $P(t) = P(t/n)^n > 0$, cosicché $P(t)$ è regolare. Ciò si deduce anche dal fatto che esiste una potenza di Q tale che $(Q^n)_{ij} > 0$ per $i \neq j$.
(c) Si ha:

$$P(h) = Id + hQ + o(h) \quad \text{per } h \to 0$$

Pertanto:

$$P(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.01 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2 & 5/3 \\ 1/3 & 5/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 & 0.01 \\ 0.01/3 & 0.98 & 0.05/3 \\ 0.01/3 & 0.05/3 & 0.98 \end{pmatrix}$$

Risulta $(P(0.01))^2 > 0$.
(d) La CM a tempo discreto "accelerata" ha probabilità di tranzizione $\widehat{p}_{ij} = q_{ij}/(-q_{ii})$, per $i \neq j$, e $\widehat{p}_{ii} = 0$; pertanto:

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \\ 1/6 & 5/6 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome questa CM a tempo discreto è regolare ($\widehat{P}^4 > 0$), la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ coincide con quella invariante e si ottiene risolvendo l'equazione $\widehat{\pi}\widehat{P} = \widehat{\pi}$, da cui si ricava:

$$\widehat{\pi} = \left(\frac{11}{77}, \frac{30}{77}, \frac{36}{77} \right) \approx (0.1428,\ 0.3896,\ 0.4675) \neq \pi$$

Si ha:

$$dist(\pi, \widehat{\pi}) = \left[\left(\frac{11}{44} - \frac{11}{77} \right)^2 + \left(\frac{15}{44} - \frac{30}{77} \right)^2 + \left(\frac{18}{44} - \frac{36}{77} \right)^2 \right]^{1/2}$$

La CM a tempo continuo originale e quella "accelerata" non hanno lo stesso comportamento, in quanto per la prima CM i tempi medi di permanenza nei tre stati non sono tutti uguali tra loro (sono rispettivamente 1, 1/2 e 1/2) e quindi la CM a tempo continuo spende diverse frazioni di tempo soggiornando nei diversi stati. Se tali tempi medi fossero stati uguali, le due catene avrebbero evidenziato lo stesso comportamento all'equilibrio.