Esercizi su processi

1. Siano X e X' due processi che siano una modificazione l'uno dell'altro. Provare che:
(i) sono equivalenti;
(ii) se l'insieme dei tempi è $\mathbb{R}^+$ (oppure un suo sottointervallo) e sono entrambi q.c. continui, allora sono indistinguibili.

2. Si consideri lo spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}, m)$ dove $\mathcal{B}$ è la $\sigma-$algebra dei Boreliani (cioé quella generata dai s.i. aperti di $\mathbb{R}$), e m è la misura di Lebesgue. Si considerino allora i processi:

$$X_t \equiv 0 \quad \text{e} \quad Y_t(\omega) = \mathbf{1}_{\{\omega\}}(t),\ t \in [0,1]$$

Provare che X e Y sono modificazioni, ma non sono indistinguibili.

3. Siano σ e τ tempi di arresto. Provare che:
(i) τ è $\mathcal{F}_\tau$-misurabile;
(ii) $\sigma \vee \tau = \max(\sigma, \tau)$ e $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ sono tempi di arresto;
(iii) se $\sigma \leq \tau$, allora $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$;
(iv) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

4. Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, (X_t)_t, P)$ un processo progressivamente misurabile e sia:

$$Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) ds$$

(i) Posto $A = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ è integrabile}, t \geq 0\}$, mostrare che, se $A = \Omega$, allora $Y = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, (Y_t)_t, P)$ è un processo progressivamente misurabile e continuo.
(ii) Se inoltre X è standard e A^C è trascurabile, allora, ponendo $Y_t = 0$ su A^C, il processo Y è progressivamente misurabile.

Soluzioni degli esercizi su processi

1. Ricordiamo che:

• $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, P)$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, X'_t, P')$ si dicono *equivalenti* se $\forall\ t_1, \ldots, t_n \in T$, le v.a. $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ e $(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$ hanno la stessa legge.
• Si dice che uno è una *versione* (o modificazione) dell'altro se $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega', \mathcal{F}', P')$ e $\forall t \in T$ risulta $X_t = X'_t$ $P-$q.c. (questa condizioe è più forte, quindi in particolare sono equivalenti).
• Si dice che sono *indistinguibili* se $P(X_t = X'_t\ \forall t \in [0, T]) = 1$ (in particolare, uno è una versione dell'altro - il viceversa non è vero).

(i) occorre provare che $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ e $(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$ hanno la stessa legge, sapendo che $X_t = X'_t$ $P-$q.c. Si ha:

$$A = \{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \neq (X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_{t_i} \neq X'_{t_i}\}$$

Dunque:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_{t_i} \neq X'_{t_i}\}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left(\{X_{t_i} \neq X'_{t_i}\}\right) = 0$$

visto che $\{X_{t_i} \neq X'_{t_i}\}$ è un evento di probabilità nulla. Pertanto, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ e $(X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$ hanno la stessa legge.

(ii) Siccome le traiettorie dei due processi sono continue, se esse coincidono in tempi di un s.i. denso, allora coincidono in tutto $T \subset \mathbb{R}^+$. Sia $\{t_n\}$ densa in T; allora:

$$\bigcap_{t \in T} \{X_t = X'_t\} = \bigcap_{n} \{X_{t_n} = X'_{t_n}\}$$

Siccome X' è una versione di X, vale $P(X_{t_n} = X'_{t_n}) = 1\ \forall n$, e quindi $P(\bigcap_{t \in T} \{X_t = X'_t\}) = 1$, il che significa che $P(X_t = X'_t\ \forall t \in T) = 1$, cioé X e X' sono indistinguibili.

2. Ovviamente, per ogni $t \in [0, 1]$ e per quasi ogni $\omega \in [0, 1]$ (rispetto a m) risulta $X_t = Y_t$, e quindi Y è una modificazione di X. Ma $\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega),\ \forall t \in [0, 1]\} = \emptyset$ e quindi non è vero che $P(X_t = Y_t\ \forall t \in [0, 1]) = 1$.

3. Ricordiamo che:

• Una *filtrazione* è una famiglia di sotto $\sigma-$algebre di $\mathcal{F}$ crescente in t, cioé $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ se $s \leq t$.
• Se $(\mathcal{F})_{t \in T}$ è una filtrazione, una v.a. $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{+\infty\}$ si dice un *tempo di arresto* se $\forall t \in T$ risulta $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Si pone $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \in T\}$, dove $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$.

(i) Basta provare che $\forall s \geq 0$ risulta $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_\tau$. Intanto $\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_\infty$; occorre poi provare che $\forall t\ :\ \{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ma:

se $t \leq s$ si ha $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

se $t > s$ si ha $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$,

il che prova quanto dovuto.

(ii) Si ha:

$\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \implies \sigma \wedge \tau$ è tempo di arresto;

$\{\sigma \vee \tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \implies \sigma \vee \tau$ è tempo di arresto.

(iii) Sia $A \in \mathcal{F}_\sigma$, allora $\forall t :\ A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Poiché $\{\tau \leq t\} \subset \{\sigma \leq t\}$ (visto che $\sigma \leq \tau$), allora:

$A \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ (in quanto intersezione di insiemi di $\mathcal{F}_t$); quindi $A \in \mathcal{F}_\tau$. Dunque $A \in \mathcal{F}_\sigma \Longrightarrow A \in \mathcal{F}_\tau$, cioé $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(iv) Risulta:

$$\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau) \leq \sigma \text{ e } \sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau) \leq \tau$$

Allora, per il punto (iii) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma$ e $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\tau$, cioé $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

Mostriamo ora l'inclusione opposta.

Sia $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$, allora $A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ e $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Quindi:

$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = A \cap (\{\sigma \leq t\} \cup \{\tau \leq t\}) = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$, in quanto unione di insiemi di $\mathcal{F}_t$. Abbiamo quindi provato che $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau \Longrightarrow A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, ovvero $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.