

Lista di esercizi N.3

1. Due centralini tra loro indipendenti ricevono nell'unità di tempo un numero di telefonate X e Y aventi leggi di Poisson di parametri, rispettivamente, $\lambda = 1$ e $\mu = 3$. Qual è la probabilità che nell'unità di tempo i due centralini ricevano insieme non più di 3 telefonate?
2. La v.a. X assume i valori $-1, 0, 1$ con uguali probabilità. Trovare la distribuzione congiunta e le marginali di X e X^2 .
3. Lanciati due dadi, siano X e Y i punti ottenuti con ciascuno di essi. Se $U = \min(X, Y)$, $V = |X - Y|$, trovare la distribuzione congiunta di U e V . U e V sono v.a. indipendenti?
4. X è una v.a. a valori in \mathbf{Z} tale che $P(X = X^3) = 1$. Trovare la funzione di probabilità di X , sapendo che $P(X = -1) = P(X = 1) = p$. Se Y è un'altra v.a. che assume valori $-1, 1$ con probabilità $q, 1 - q$, e Y è indipendente da X , calcolare la legge di $Z = X + Y$.
5. Calcolare media e varianza del punto che esce quando si lancia un dado perfetto.
6. Una v.a. discreta X assume i valori $1, 2, 3, 4$ e $P(X = 1) = P(X = 2) = 1/4$. Sapendo che $E(X) = 21/8$, trovare la funzione di probabilità di X e $Var(X)$.
7. Provare che la media di una v.a. intera positiva X si può calcolare con la formula

$$E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n)$$

8. Sia X una v.a. uniforme su $\{1, 2, \dots, n\}$. Calcolare $E(X)$.
9. X e Y sono v.a. indipendenti e uniformi su $\{1, 2, \dots, n\}$. Trovare la legge di $Z = \max(X, Y)$. Calcolare anche $E(Z)$.
10. Siano X e Y v.a. indipendenti con distribuzioni uniformi su $\{1, 2, \dots, n\}$ e $\{1, 2, \dots, n, \dots, 2n\}$, rispettivamente. Trovare la legge di $Z = \max(X, Y)$; calcolarne inoltre media e varianza.
11. Stesso esercizio di sopra per $U = \min(X, Y)$.
12. Due dadi equilibrati vengono lanciati separatamente più volte. Sia X il numero di lanci necessario ad ottenere 1 col primo dado e Y il numero dei lanci necessario a ottenere 5 oppure 6 col secondo.
 - (i) Qual è la legge di X ? e di Y ? Qual è $E(X)$? e $E(Y)$?
 - (ii) Trovare la densità discreta di $Z = \max(X, Y)$ e $E(Z)$.
 - (iii) calcolare $P(X \geq Y)$.
13. Una moneta dà testa con probabilità p e viene lanciata N volte, dove N è una v.a. di Poisson di parametro λ . Siano X e Y il numero di teste e di croci,
 - (i) Calcolare le leggi di X e Y .
 - (ii) X e Y sono indipendenti?
14. Si lanciano una moneta e un dado non truccati. Se la moneta dà testa, si lancia il dado e sia X il numero uscito. Se invece la moneta dà croce, si lancia il dado due volte e si pone $X = \min$ dei due lanci. Trovare la legge discreta della v.a. X .

- 15.** Stesso esercizio di sopra, col massimo dei due lanci.
- 16.** Una scatola contiene 20 penne: 3 rosse, 6 nere e le restanti blu. Si sa che 7 penne non scrivono. A caso, ne vengono prese 2. Qual è la probabilità che almeno una delle due penne pescate non scriva?
- 17.** Si consideri una successione di prove ripetute, con probabilità di successo uguale a p in ogni singola prova. Trovare la distribuzione del numero di successi in n prove, sapendo che in $m(\geq n)$ prove si hanno s successi.
- 18.** Quante volte bisogna lanciare un dado affinché si abbia una chance del 99% che esca almeno una volta il 6?
- 19.** Due numeri vengono estratti, senza reimussolamento, da un'urna contenente sei palline numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?