

Lista di esercizi N.1

1. Siano  $X, Y$  e  $Z$  tre v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in  $[0, 1]$ . Trovare la densità della v.a.  $W = X + Y + Z$ .

2. Un punto è scelto a caso nel piano con densità :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Sia  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  la distanza del punto scelto dall'origine. i) Trovare la legge di  $Z$ ; ii) qual è la probabilità che il punto si trovi fuori del cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio 1?

3. Sia  $Y$  una v.a. con legge esponenziale di parametro  $\xi$ , ove  $\xi$  è una v.a. con legge Gamma di parametri  $\alpha$  e  $\lambda$ . Qual è la legge di  $Y$ ? Esiste finita  $E(Y)$ ? in caso affermativo, quanto vale? Qual è la densità condizionale di  $\xi$  dato  $Y = y$ ? Quanto vale, infine,  $E(\xi|Y = y)$ ?

4. Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio di densità congiunta  $f(x, y)$ . Calcolare la densità della v.a.  $Z = X + Y$ .

5. Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio di densità congiunta  $f(x, y)$ . Calcolare la densità della v.a.  $Z = Y/X$ .

6. Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio di densità congiunta  $f(x, y)$ . Calcolare la densità della v.a.  $Z = XY$ .

7. Siano  $X$  e  $Y$  indipendenti di leggi  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  e  $\Gamma(\beta, \mu)$ , rispettivamente. Trovare la legge di  $Z = \frac{X}{X+Y}$ .

8. Siano  $X, Y \sim N(0, 1)$  e indipendenti. Trovare la legge di  $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$ .

9. Siano  $X$  e  $Y$  v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro  $\lambda$ . Trovare la legge di  $Z = \frac{X}{X+Y}$ .

10. Siano  $X, Y \sim Exp(\lambda)$  e indipendenti. Trovare la legge di  $Z = \frac{X^2}{X^2+Y^2}$ .

11. Siano  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y = X + W$ , dove  $W \sim N(0, \sigma^2)$  ed è indipendente da  $X$ . Calcolare: i) la legge di  $Y$  e la legge congiunta di  $X$  e  $Y$ ; ii)  $E(X|Y = y)$ ; iii) sia  $\sigma^2 = 0.1$ ; se si osserva il valore  $y = 11/20$ , quanto vale  $P(1/4 < X < 3/4)$ ?

12. Siano  $X, Y \sim Exp(\lambda)$  e indipendenti. Trovare la densità di  $Z = \frac{X-Y}{X+Y}$ .

13. Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio di densità congiunta  $f(x, y) = x + y$  per  $0 < x < 1$ ;  $0 < y < 1$ . Calcolare la densità della v.a.  $Z = Y/X$ .

14. Sia  $(X, Y)$  un vettore aleatorio di densità congiunta  $f(x, y) = e^{-y}$  per  $0 < x < y$ . Trovare la densità di  $X$ , di  $Y$  e di  $(X, Z)$ , dove  $Z = Y - X$ .

15. Siano  $X$  e  $Y$  indipendenti e uniformemente distribuite in  $[0, 1]$ . Trovare la densità di  $Z = \frac{\max(X, Y)}{\min(X, Y)}$ .

16. Siano  $X$  e  $Y$  indipendenti ed esponenziali di parametro  $\lambda$ . Se  $U = X + Y$  e  $V = X/(X + Y)$ , trovare la densità di  $(U, V)$ , di  $U$  e di  $V$ .

17. Siano  $X, Y$  e  $Z$  indipendenti ed esponenziali di parametro  $\lambda$ . Trovare la densità di  $Z - X$  condizionata da  $X < Z < Y$ .