1 Osservazione su alcune v.a. discrete

Tra le v.a. discrete, abbiamo finora visto:

1. V.a. Uniforme sull'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; si denota con $X \sim Uni(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
X assume valori in $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con uguali probabilità, ovvero $p_k = P(X = x_k) = 1/n,\ k = 1, 2, \ldots, n$.
Esempio: $X = \#$ che esce, lanciando un dado non truccato; in tal caso, $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $p_k = 1/6,\ k = 1, 2, \ldots, 6$.

2.1 V.a. di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$; si denota con $X \sim B(1, p)$.
X assume valori in $\{0, 1\}$ con probabilità:

$$p_0 = P(X = 0) = 1 - p,\ p_1 = P(X = 1) = p.$$

Esempio: si lancia una sola volta una moneta, per la quale la probabilità di uscita di Testa è $p \in (0, 1)$; se si scrive 1 sulla faccia Testa e 0 su quella Croce, $X \in \{0, 1\}$ è il risultato del lancio.

2.2 V.a. Binomiale di parametri $(n, p),\ p \in (0, 1)$; si denota con $X \sim B(n, p)$.
X assume valori in $\{0, 1, \ldots, n\}$ con probabilità:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Esempio 1: $X = \#$ volte che esce Testa, lanciando n volte una moneta, per la quale la probabilità di uscita di Testa in ogni lancio è $p \in (0, 1)$; i risultati dei successivi lanci sono **indipendenti** tra loro.
Esempio 2: $X = \#$ di palline rosse estratte, in n estrazioni **con rimpiazzo**, da un'urna contenente r palline rosse e b bianche; $p = r/(b + r)$ è la probabilità di estrarre una pallina rossa, ad ogni estrazione; i risultati delle successive estrazioni sono **indipendenti** tra loro.
Si può scrivere $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, dove le v.a. $X_i \sim B(1, p),\ i = 1, 2, \ldots, n$, e le v.a. X_i sono indipendenti; X_i vale 1 se all'i-esimo lancio della moneta (o i-esima estrazione di una pallina, **con rimpiazzo**) esce Testa (o una pallina rossa), X_i vale 0, altrimenti.

3. V.a. Ipergeometrica di parametri (r, b, n); si denota con $X \sim Hyper(r, b, n)$.
X assume valori interi non negativi k tali che $n \leq b + r$ e $\max\{0, n - b\} \leq k \leq \min\{r, n\}$.
Si ha:

$$p_k = P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$$

Esempio: X conta il numero di palline rosse estrattte in n estrazioni **senza rimpiazzo** da un'urna contenente r palline rosse e b bianche; i risultati delle successive estrazioni **non** sono indipendenti tra loro.
Si può ancora scrivere $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, dove le v.a. $X_i \sim B(1, p),\ i = 1, 2, \ldots, n$, però le v.a X_i **non** sono indipendenti; X_i vale 1 se all'i-esima estrazione di una pallina, **senza rimpiazzo**, esce una pallina rossa, X_i vale 0, altrimenti.

4. V.a. Geometrica modificata di parametro $p \in (0,1)$ (Istante di primo successo).
T assume valori $k \in \{1, 2, \dots, \}$. Si ha:

$$p_k = P(T = k) = p(1-p)^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots$$

Esempio: $T =$ istante di primo successo, in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane, in ciascuna delle quali la probabilità del successo è $p \in (0,1)$.
T gode della proprietà di mancanza di memoria:

$$P(T > n + m | T > n) = P(T > m),$$

ed è l'unica v.a. discreta, che assume valori interi positivi, a godere di tale proprietà.

5. V.a. Geometrica di parametro $p \in (0,1)$; si denota con $X \sim Geom(p)$.
X assume valori $k \in \{0, 1, 2, \dots, \}$. Si ha:

$$p_k = P(T = k) = p(1-p)^{k}, \ k = 0, 1, 2, \dots$$

Esempio: X rappresenta il numero degli insuccessi che precedono il primo successo, in una sequenza di prove indipendenti e Bernoulliane, in ciascuna delle quali la probabilità del successo è $p \in (0,1)$. Risulta $X = T - 1$, dove T è l'istante di primo successo. Anche X gode di una proprietà di mancanza di memoria, che si scrive ora:

$$P(X = n + m | X \geq n) = P(X = m).$$

X è l'unica v.a. discreta, che assume valori interi non negativi, a godere di tale proprietà.