Esercizi sul moto Browniano

1. Il MB è un processo Gaussiano con media 0 e funzione di covarianza $s \wedge t = \min(s,t)$.

2. (Proprietà di scaling)
Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (B_t), P)$ un MB continuo. Allora anche:
(i) (omogeneità temporale) $X_t = B_{t+s} - B_s$
(ii) (simmetria) $X_t = -B_t$
(iii) (scaling temporale) $X_t = cB_{t/c^2},\ c = \text{costante}$
(iv) (inversione temporale)

$$X_t = \begin{cases} tB_{1/t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

sono MB continui su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il primo rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t+s})_t$, il secondo rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$, il terzo rispetto a $(\mathcal{F}_{t/c^2})_t$, il quarto è un MB naturale.

3. Se B_t è un MB, allora anche $X_t = B_{1-t} - B_1,\ t \in [0,1]$, è MB.

4. Sia B_t un MB continuo; provare che, per quasi ogni $t > 0,\ B_t$ non è derivabile.

5. (Principio di riflessione)
Se B_t è MB e a = costante, allora:

$$P\left(\sup_{s \le t} B_s \ge a\right) = 2P(B_t \ge a)$$

6. Per $a > 0$, poniamo $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t \ge a\}$. Allora la densità del tempo aleatorio τ_a (istante di primo attraversamento della barriera a) è per $t > 0$:

$$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} e^{-a^2/2t}$$

7. Trovare la legge di $B_s + B_t$.

8. Trovare la distribuzione di $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$.

9. Trovare la distribuzione di $B_{1/4} + B_{1/2} + B_{3/2} + B_1$.

10. Calcolare $P(\int_0^1 B_t dt > 2/\sqrt{3})$

11. Calcolare $E(e^{-\theta B_t^2})$.

12. Se B_t è un MB continuo, provare che $\forall \epsilon > 0,\ P(B_t = 0 \text{ infinite volte in} [0,\epsilon]) = 1$.

13. Se B_t è un MB, provare che il processo $Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$ è MB.

Soluzioni degli esercizi sul moto Browniano

1. Ricordiamo che:
Un processo X_t è detto Gaussiano se le sue distribuzioni finito-dimensionali sono normali multivariate, cioé:

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(b, C)$$

$\forall t_1, t_2, \ldots, t_n,\ \forall n$, ove C dipende da $t_1, \ldots, t_n$;
equivalentemente, un processo è Gaussiano se $\sum_i \lambda_i X_{t_1}$ è una v.a. normale, per ogni scelta di $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$. La funzione di covarianza di X_t è:

$$Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)$$

Per $X_t = B_t$ (moto Browniano) si ha $E(B_t) = 0$ e $Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s)$.
Se $s < t$, $B_t = B_s + (B_t - B_s)$, allora:

$$E(B_t B_s) = E(B_s B_s) + E(B_s(B_t - B_s)) =$$

(siccome $E(B_s^2) = Var(B_s) = s$ e per l'indipendenza degli incrementi)

$$= s + E(B_s)E(B_t - B_s) = s + 0 = s$$

Se $s \geq t$, si ottiene lo stesso risultato, scambiando s e t; dunque vale $Cov(B_t, B_s) = \min(s, t)$.
Per provare che B_t è un processo Gaussiano, mostriamo che $\sum_i \lambda_i B_{t_i}$ è normale; procederemo per induzione. Siano dunque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$; per $n = 1$ è ovvio che $\lambda_1 B_{t_1}$ è normale. Supponiamo ora l'affermazione vera per $n - 1$, allora:

$$\lambda_1 B_{t_1} + \ldots + \lambda_n B_{t_n} = [\lambda_1 B_{t_1} + \ldots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n) B_{t_{n-1}}] + \lambda_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

che è normale, in quanto somma di due v.a. normali indipendenti.

2. Ricordiamo che X_t è un MB se e solo se:
(1) $X_0 = 0$ q.c.; (2) $X_t - X_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$; (3) $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s),\ s < t$.
Oppure: (2') $\forall\ 0 \leq t_1 < \ldots < t_n,\ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ è una v.a. $n-$ dimensionale centrata; (3') $E(X_s X_t) = s \wedge t = \min(s, t)$.

(i) (1) $X_0 = B_s - B_s = 0\ q.c$; (2') $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = (B_{t_1+s} - B_s, B_{t_2+s} - B_s, \ldots, B_{t_n+s} - B_s)$ che è normale $n-$dimensionale centrata, visto che $B_{t_i} - B_s$ è indipendente da $B_{t_j} - B_s\ \forall j \neq i$ e $B_{t_i+s} - B_s \sim \mathcal{N}(0, t_i)$. (3') se $u < t$:

$$E(X_u X_t) = E((B_{u+s} - B_s)(B_{t+s} - B_s)) =$$

$$= E(B_{u+s} B_{t+s}) - E(B_{u+s} B_s) - E(B_s B_{t+s}) + E(B_s^2) = u + s - s - s + s = u$$

Se $u \geq t$, si ottiene $E(X_u X_t) = t$, quindi $E(X_u X_t) = \min(u, t)$.
(ii) (1), (2) e (3) sono ovviamente tutte soddisfatte.

(iii) (1) $X_0 = cB_0/c^2 = 0$ *q.c.*; (2) $X_t - X_s = c(X_{t/c^2} - X_{s/c^2})$ è indipendente da $\mathcal{F}_{s/c^2}$; (3) $X_t - X_s = c(W_{t/c^2} - X_{s/c^2}) \sim \mathcal{N}(0, c^2 \cdot \frac{t-s}{c^2})$, cioé $\mathcal{N}(0, t-s)$. Oppure, se $s < t$: $E(X_s X_t) = E(cX_{s/c} cX_{t/c}) = c^2 E(X_{s/c^2} X_{t/c^2}) = c^2 \cdot \frac{s}{c^2} = s$.
(iv) (1) $X_0 = 0$ *q.c.*; (2') si può scrivere:

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T = (t_1 B_{1/t_1}, \ldots, t_n B_{1/t_n})^T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & t_{n-1} & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1/t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix}$$

$$= \Lambda \begin{pmatrix} B_{1/t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix}$$

Ma, posto $1/t_i = t'_i$, il vettore

$$\begin{pmatrix} B_{1/t_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{1/t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{t'_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{t'_n} \end{pmatrix}$$

è Gaussiano centrato, quindi $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T$ è trasformazione lineare tramite Λ di un vettore Gaussiano centrato e dunque è Gaussiano centrato. Infine: se $s < t$ è $1/s > 1/t$, quindi $E(X_s X_t) = E(sX_{1/s} tX_{1/t}) = stE(X_{1/s} X_{1/t}) = st \cdot \frac{1}{t} = s = \min(s,t)$. Resta da verificare la continuità per $t = 0$. Ricordiamo che vale la seguente *Legge del logaritmo iterato*:

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \ q.c. \text{ e } \liminf_{t \to -\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \ q.c.$$

Allora:

$$\limsup_{t \to 0^+} \ tB_{1/t} = \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} B_s = \limsup_{s \to +\infty} \frac{\sqrt{2s \ln \ln s}}{s} = 0$$

Analogamente:

$$\liminf_{t \to 0^+} \ tB_{1/t} = \liminf_{s \to +\infty} \frac{1}{s} B_s = \liminf_{s \to +\infty} \frac{\sqrt{2s \ln \ln s}}{s} = 0$$

da cui segue che $\lim_{t \to 0^+} tB_{1/t} = 0$.

3. Sia $X_t = B_{1-t} - B_1, \ t \in [0,1]$. Allora:
(1) $X_0 = 0$ q.c.; (2) per ogni $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, $X_{t_4} - X_{t_3}$ e $X_{t_2} - X_{t_1}$ sono indipendenti. Infatti:

$$X_{t_4} - X_{t_3} = B_{1-t_4} - B_1 - B_{1-t_3} + B_1 = B_{1-t_4} - B_{1-t_3};$$

analogamente

$$X_{t_2} - X_{t_1} = B_{1-t_2} - B_1 - B_{1-t_1} + B_1 = B_{1-t_2} - B_{1-t_1}$$

e quindi gli incrementi $X_{t_4} - X_{t_3}$ e $X_{t_2} - X_{t_1}$ sono indipendenti, visto che $0 < 1 - t_4 < 1 - t_3 < 1 - t_2 < 1 - t_1$.
(3) per $s < t$ si ha: $X_t - X_s = B_{1-t} - B_1 - B_{1-s} + B_1 \sim B_{1-s} - B_{1-t} \sim \mathcal{N}(0, 1-s-(1-t)) = \mathcal{N}(0, t-s)$.

4. Si ha per $t_0 > 0$:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{B_t - B_{t_0}}{t - t_0} = \lim_{s\to 0} \frac{B_{t_0+s} - B_{t_0}}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\tilde{B}_s}{s},$$

ove $\tilde{B}_t$ è ancora MB. Per la legge del logaritmo iterato, il limite superiore e il limite inferiore di $|\frac{\tilde{B}_s}{s}|$ valgono ∞, quindi si conclude che B_t non è derivabile in alcun punto.

5. Per la dimostrazione del pricipio di riflessione, consultare libro di testo.

6. Per il principio di riflessione:

$$P(\tau_a \le t) = P(\max_{s\le t} B_s \ge a) = 2P(B_t > a) = 2(1 - P(B_t \le a))$$

Siccome $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, risulta $B_t/\sqrt{t} \sim \mathcal{N}(0,1)$; quindi $P(B_t \le a) = (B_t/\sqrt{t} \le a/\sqrt{t}) = \Phi(a/\sqrt{t})$, dove

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

è la funzione di distribuzione di una v.a. Gaussiana standard. Pertanto, posto $\Psi(x) = 1 - \Phi(x)$ si ha $P(\tau_a \le t) = 2\Psi(a/\sqrt{t})$. Derivando:

$$\frac{d}{dt} P(\tau_a \le t) = f_a(t) = -2\Phi'(a/\sqrt{t}) = \ldots = \frac{a}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} e^{-a^2/t}$$

Notare che $E(\sqrt{\tau_a}) = +\infty$, visto che la densità di τ_a si comporta come $1/t^{3/2}$ per $t \to +\infty$; a maggior ragione $E(\tau_a) = +\infty$. Però, grazie alla legge del logaritmo iterato, si ha che $\tau_a < +\infty$ con probabilità 1; infatti, per $t \to +\infty$, il limite superiore e quello inferiore di B_t si comportano come $\pm\sqrt{2t \ln \ln t}$ che tende a $\pm\infty$, e quindi B_t, essendo un processo continuo, supera certamente la barriera a in un tempo finito. Stesso ragionamento, per l'attraversamento di una barriera $-b < 0$. Se ne deduce che B_t esce in un tempo q.c. finito da un qualunque intervallo $[-b, a]$.

7. Si ha:

$$B_s + B_t = (B_t - B_s) + 2B_s$$

e quindi $B_s + B_t$ è somma di due v.a. normali indipendenti di media zero. Essa è quindi una v.a Gaussiana di media 0 e varianza la somma delle varianze, cioé $t - s + 4s = t + 3s$. Dunque $B_s + B_t \sim \mathcal{N}(0, t + 3s)$.

8. Consideriamo il vettore aleatorio $X = (B_1, B_2, B_3, B_4)^T$. Poiché B_t è un processo Gaussiano, le sue distribuzioni finito-dimensionali sono normali. In particolare, $X \sim \mathcal{N}(0, C)$ ove $c_{ij} = cov(B_i, B_j) = \min(i, j),\ i, j = 1, 2, 3, 4$. Dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se $a = (1, 1, 1, 1)$ allora

$$aX = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \sim \mathcal{N}(0, aCa^T)$$

dove

$$aCa^T = (1\ 1\ 1\ 1)C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 30$$

Pertanto $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \sim \mathcal{N}(0, 30)$. La varianza di $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ si poteva anche calcolare nel modo seguente:

$$var(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = cov(B_1 + B_2 + B_3 + B_4, B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = \sum_{i,j} cov(B_i, B_j) = 30$$

Alternativamente:

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 4B_1 + 3(B_2 - B_1) + 2(B_3 - B_2) + B_4 - B_3$$

ovvero somma di v.a. normali indipendenti, per cui $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.
In generale $B_1 + B_2 + \ldots + B_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(n))$ con

$$\sigma^2(n) = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

9. Il vettore aleatorio $Y = (B_{1/4}, B_{1/2}, B_{3/4}, B_1)^T$ ha la stessa legge di $X/2$, dove $X = (B_1, B_2, B_3, B_4)^T$. Dunque, la matrice di covarianza di Y è $\frac{1}{4}C$. Allora $aY = B_{1/4} + B_{1/2} + B_{3/4} + B_1 \sim \mathcal{N}(0, \frac{30}{4})$.

10. Si ha:

$$\int_0^1 B_t dt = \lim_{n\to\infty} \sum_i B_{t_i} \Delta t$$

Per esempio, se $t_i = i/n$ e $n = 4$, la somma verrebbe $\frac{1}{4}(B_{1/4} + B_{1/2} + B_{3/4} + B_1)$ che ha distribuzione $\mathcal{N}(0, \frac{1}{16} \cdot \frac{30}{4})$, cioé $\mathcal{N}(0, \frac{15}{32})$. In maniera analoga, la distribuzione di $\sum_i B_{t_i} \Delta t$ è normale con media zero, inoltre si può dimostrare che il limite di una distribuzione Gaussiana è Gaussiana, dunque $\int_0^1 B_t dt \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Resta da calcolare $\sigma^2 = Var(\int_0^1 B_t dt)$. Si ha:

$$Var\left(\int_0^1 B_t dt\right) = cov\left(\int_0^1 B_t dt, \int_0^1 B_s ds\right) =$$

$$= E\Big[\left(\int_0^1 B_t dt\right)\left(\int_0^1 B_s ds\right)\Big] = \int_0^1 dt \int_0^1 ds E(B_t B_s) =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^1 ds \cdot \min(s, t) = \ldots = \frac{1}{3}\ .$$

Dunque $\int_0^1 B_t dt \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$ e quindi $P(\int_0^1 B_t dt > 2/\sqrt{3}) = P(W > (2/\sqrt{3})/(1/\sqrt{3}))$, dove $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$; pertanto $P(\int_0^1 B_t dt > 2/\sqrt{3}) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275$
Alternativamente, siccome per la proprietà di scaling:

$$\sqrt{n} B_{1/n} \sim B_1,\ \sqrt{n} B_{2/n} \sim B_2, \ldots, \sqrt{n} B_1 \sim B_n,$$

si ha:

$$B_{1/n} + B_{2/n} + \ldots + B_1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2(n)}{n}),$$

dove $\sigma^2(n)$ è definito nell'esercizio 8. Allora

$$\int_0^1 B_t dt = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} B_{i/n} = \lim Z_n,$$

dove $Z_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\sigma^2(n)}{n})$. Per $n \to \infty$, si ottiene che Z_n converge in distribuzione ad una v.a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$, visto che $\frac{\sigma^2(n)}{n} \to 1/3$. Pertanto, riotteniamo di nuovo che $\int_0^1 B_t dt \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$.

11. Siccome $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, allora $B_t^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2t})$. Ricordando che per una v.a. X con distribuzione Gamma di parametri α e λ vale $E(e^{-\theta X}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^\alpha$, si ottiene:

$$E\left(e^{-\theta B_t^2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2t}}{\frac{1}{2t} + \theta}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\theta t}}$$

12. Posto $\epsilon_n = 1/n$, per la legge del logaritmo iterato, esistono due successioni, diciamo $\{s_n\} \leq \{t_n\}$, con $s_n,\ t_n \to 0^+$, e tali che q.c.

$$B_{t_n} > (1-\epsilon_n)\sqrt{2t_n \ln\ln(1/t_n)} \ \text{ e } \ B_{s_n} < -(1-\epsilon_n)\sqrt{2s_n \ln\ln(1/s_n)}$$

In particolare $B_{s_n} < 0 < B_{t_n}$. Allora, per il teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue esiste $t_n^* \in (s_n, t_n)$ tale che $B(t_n^*) = 0$.

13. Mostreremo che Z_t è un processo Gaussiano con le giuste funzioni di media e covarianza. Osserviamo che $Z = (Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n})$ è un vettore Gaussiano, in quanto limite q.c. di un vettore con componenti $Z^n_{t_i} = B_{t_i} - \sum_{j=1}^n \frac{B_{t_j}}{t_j}(t_{j+1} - t_j)$ che è Gaussiano, in quanto trasformazione lineare del vettore Gaussiano $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$. E' immediato che $E(Z_t) = 0$, calcoliamo ora la covarianza. Si ha, per $s < t$:

$$E(Z_s Z_t) = E\Big[\left(B_s - \int_0^s \frac{B_v}{v} dv\right)\left(B_t - \int_0^t \frac{B_u}{u} du\right)\Big] =$$

$$E(B_s B_t) - \int_0^s \frac{E(B_t B_v)}{v} dv \ - \int_0^t \frac{E(B_s B_u)}{u} du + \int_0^s dv \int_0^t \frac{E(B_v B_u)}{uv} du =$$

$$= s - \int_0^s \frac{v}{v} dv - \int_0^s \frac{u}{u} du - \int_s^t \frac{s}{u} du + \int_0^s dv \int_0^t \frac{v \wedge u}{uv} du =$$

$$= s - s - s - s(\ln t - \ln s) + \mathcal{I}$$

Calcoliamo l'integrale doppio; si ha:

$$\mathcal{I} = \int_0^s dv \int_0^t \frac{v \wedge u}{uv} du =$$

$$= \int_0^s dv \int_0^v \frac{1}{v} du + \int_0^s dv \int_v^t \frac{1}{u} du = s + \int_0^s (\ln t - \ln v) dv =$$

$$= s + s\ln t - s\ln s + s = 2s + s(\ln t - \ln s)$$

Dunque, per $s < t$ abbiamo ottenuto $E(Z_s Z_t) = -s - s(\ln t - \ln s) + 2s + s(\ln t - \ln s) = s$, che completa la prova.