Esercizi su martingale

1. Sia X una v.a. integrabile, mostrare che $Z_t = E(X|\mathcal{F}_t)$ è una martingala.

2. Sia M_t una $\mathcal{F}_t$-martingala di quadrato integrabile, ovvero $E(M_t^2) < +\infty$, $\forall t$. Mostrare che:
(i) $E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2,\ s < t$
(ii) $E((M_t - M_s)^2) = E(M_t^2) - E(M_s^2),\ s < t$
(iii) la funzione $\psi(t) = E(M_t^2)$ è crescente.

3. X_t è una martingala se e solo se per ogni tempo di arresto limitato τ risulta $E(X_\tau) = E(X_0)$.

4. Sia B_t un MB, allora:
(i) B_t è una $\mathcal{F}_t$-martingala
(ii) $X_t = B_t^2 - t$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala
(iii) $Y_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ è una $\mathcal{F}_t$-martingala, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

5. Se B_t è un MB, calcolare, per $s < t$:
(i) $E(B_s B_t^2)$
(ii) $E(B_t|\mathcal{F}_s)$
(iii) $E(B_t|B_s)$
(iv) $E(B_t^2 B_s^2)$.

6. Se B_t è un MB e $a > 0$, sia $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t \geq a\}$ il tempo di primo attraversamento di B_t attraverso la barriera $\{x = a\}$. Mostrare che la trasformata di Laplace di τ_a è $\psi(\lambda) = E(e^{-\lambda\tau_a}) = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.

7. Sia B_t un MB e $a, b > 0$. Sia τ il tempo di uscita di B_t dall'intervallo $[-a, b]$ (si può dimostrare che τ è q.c. finito).
(i) Calcolare $P(B_\tau = -a)$ e $P(B_\tau = b)$
(ii) Calcolare $E(\tau)$.

8. Se B_t è un MB e $a > 0$, sia $\tau_a = \inf\{t > 0 : |B_t| \geq a\}$. Per $M > 0$, calcolare $E(e^{-M\tau_a})$ e, per $0 < a < \frac{\pi}{2\sqrt{2M}}$, calcolare anche $E(e^{M\tau_a})$.

9. (Processo di Poisson)
Per $\lambda > 0$, sia N_t, con $N_0 = 0$, un processo ad incrementi indipendenti, tale che $N_t - N_s \sim N_{t-s}$ abbia distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(t - s)$ e le traiettorie di N_t siano non decrescenti con salti costanti ed uguali a 1. Un tale processo si chiama *processo di Poisson omogeneo*. Gli inter-tempi di salto sono v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro λ. Valgono le formule:

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k \geq 0,\ E(N_t) = \lambda t,\ Var(N_t) = \lambda t$$

(i) Calcolare la variazione e la variazione quadratica di N_t nell'intervallo $[0, t]$, mostrando che esse sono entrambe uguali a N_t. Dunque il processo di Poisson ha variazione e variazione quadratica positive e finite.
(ii) Mostrare che $X_t = N_t - \lambda t$ è una martingala.
(iii) Mostrare che $Y_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ è una martingala.

Soluzione degli esercizi su martingale

1. Se $Z_t = E(X|\mathcal{F}_t)$ e $s < t$, si ha $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Allora:

$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = E(E(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = E(X|\mathcal{F}_s) = Z_s$$

e quindi Z_t è una martingala.

2. (i) Se $s < t$, si ha:

$$E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) = E(M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2|\mathcal{F}_s) =$$

$$= E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2M_sE(M_t|\mathcal{F}_s) + M_s^2 =$$

(visto che $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$, poiché M_t è martingala)

$$= E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - 2M_s^2 + M_s^2 = E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2$$

(ii)

$$E((M_t - Ms)^2) = E[E(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[E(M_t^2|\mathcal{F}_s) - M_s^2] =$$

$$= E[E(M_t^2|\mathcal{F}_s)] - E(M_s^2) = E(M_t^2) - E(M_s^2)$$

(iii) Se $\psi(t) = E(M_t^2)$, si ha, per $s < t :$

$$\psi(t) - \psi(s) = E(M_t^2) - E(M_s^2) =$$

(per (ii))

$$= E((M_t - M_s)^2) \geq 0 \Rightarrow \psi(t) \text{ crescente}$$

3. Se X è una martingala, la proprietà è conseguenza del Teorema d'arresto.
Viceversa, supposta vera la proprietà, proviamo che X è una martingala. Basta provare che, per $s < t$ e per ogni $A \in \mathcal{F}_s$, risulta:

$$E(X_t\mathbf{1}_A) = E(X_s\mathbf{1}_A) \qquad (*)$$

Infatti, X martingala $\iff E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \iff$

$$\int_{A\in\mathcal{F}_s} X_t dP = \int_{A\in\mathcal{F}_s} X_s dp \ , \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$$

che coincide con (*).
L'idea della dimostrazione è di trovare due tempi di arresto limitati, τ_1 e τ_2, tali che, dalla relazione

$$E(X_{\tau_1}) = E(X_{\tau_2}) \qquad (**)$$

segua (*). Per $A \in \mathcal{F}_s$ fissato, scegliamo:

$$\tau_1(\omega) = \begin{cases} s, & \text{se } \omega \in A \\ t, & \text{se } \omega \in A^C \end{cases} \qquad \text{e} \quad \tau_2 = t$$

τ_1 è tempo d'arresto; infatti:

$$\{\omega : \tau_1(\omega) \le u\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } u < s \\ A, & \text{se } s \le u < t \\ \Omega, & \text{se } u \ge t \end{cases}$$

e dunque, in ogni caso $\{\tau_1 \le u\} \in \mathcal{F}_u,\ \forall u$.
Ma $X_{\tau_1} = X_s \mathbf{1}_A + X_t \mathbf{1}_{A^C}$, per cui, da (**) si ricava:

$$E(X_{\tau_1}) = E(X_s \mathbf{1}_A) + E(X_t \mathbf{1}_{A^C}) = E(X_{\tau_2}) = E(X_t) = E(X_t \mathbf{1}_A) + E(X_t \mathbf{1}_{A^C})$$

da cui, sottraendo, si ricava (*).

4. (i) se $s < t$:

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_s + (B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) = E(B_s|\mathcal{F}_s) + E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) =$$

(siccome B_s è $\mathcal{F}_s-$misurabile e $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$)

$$= B_s + E(B_t - B_s) = B_s + 0 = B_s \ ,$$

e quindi B_t è una martingala.

(ii) Se $s < t$:

$$\begin{aligned} E(X_t|\mathcal{F}_s) &= E((B_s + (B_t - B_s))^2|\mathcal{F}_s) - t = \\ &= E(B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) - t = \\ &= B_s^2 + 2B_s E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) - t = \end{aligned}$$

(siccome B_s è $\mathcal{F}_s-$misurabile e $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$)

$$= B_s^2 + 2B_s E(B_t - B_s) + E((B_t - B_s)^2) - t =$$

$$= B_s^2 + 2B_s \cdot 0 + t - s - t = B_s^2 - s = X_s$$

e quindi X_t è una martingala.

(iii) Se $s < t$:

$$E(Y_t|\mathcal{F}_s) = E(e^{\lambda B_s + \lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t}|\mathcal{F}_s) =$$

(poiché B_s è $\mathcal{F}_s-$misurabile)

$$= e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} E(e^{\lambda(B_t - B_s)}|\mathcal{F}_s) =$$

(poiché $B_t - B_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$)

$$= e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} E(e^{\lambda(B_t - B_s)}) =$$

(ricordando la trasformata di laplace di una v.a. normale)

$$= e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 (t-s)} = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s} = Y_s$$

e quindi Y_t è una martingala.

5. (i) Si ha:

$$E(B_s B_t^2) = E(E(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_s)$$

Siccome B_s è $\mathcal{F}-$misurabile, se $s < t$:

$$E(B_s B_t^2) = E(B_s E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) \qquad (*)$$

Sappiamo che $Z_t = B_t^2 - t$ è una martingala, per cui $E(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_s$, cioé $E(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$, ovvero

$$E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t \qquad (**)$$

Dunque, utilizzando (*):

$$E(B_s B_t^2) = E(B_s(B_s^2 - s + t)) = E(B_s^3) + (t - s)E(B_s) = 0.$$

(ii) Siccome il MB è una martingala, per $s < t$:

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s$$

(iii) Se $s < t$:

$$E(B_t|B_s) = E(B_t - B_s + B_s|B_s) = E(B_t - B_s|B_s) + B_s = B_s$$

(poiché, essendo $B_t - B_s$ indipendente da B_s, risulta $E(B_t - B_s|B_s) = E(B_t - B_s) = 0$.)

(iv) Per $s < t$:

$$E(B_s^2 B_t^2) = E(E(B_s^2 B_t^2 | \mathcal{F}_s)) = E(B_s^2 E(B_t^2 | \mathcal{F}_s)) =$$

(per (**) dell'esercizio 5 (ii))

$$= E(B_s^2(B_s^2 - s + t)) = E(B_s^4) + (t - s)E(B_s^2)$$

Ricordando che, se $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, risulta $E(Z^4) = 3\sigma^4$, si ottiene infine

$$E(B_s^2 B_t^2) = 3s^2 + (t - s)s$$

6. Per l'esercizio 4 (iii) $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ è una martingala. Allora $(M_{\tau_a \wedge t})_t$ è una martingala limitata poiché $B_{\tau_a \wedge t} \leq a$ e quindi

$$M_{\tau_a \wedge t} = e^{\lambda B_{\tau_a \wedge t}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_a \wedge t)} <$$

(poiché $e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_a \wedge t)} < 1$)

$$< e^{\lambda a} < +\infty$$

Pertanto, si può applicare il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue e il Teorema di arresto e, siccome $\tau_a < \infty$ q.c.:

$$1 = E(M_0) = \lim_{t \to +\infty} E(e^{\lambda B_{\tau_a \wedge t}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(\tau_a \wedge t)}) = e^{\lambda a} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a}) = E(M_{\tau_a})$$

da cui

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a}) = e^{-\lambda a}.$$

Posto $\theta = \frac{1}{2}\lambda^2$, cioé $\lambda = \sqrt{2\theta}$, si ottiene:

$$E(e^{-\theta \tau_a}) = e^{-a\sqrt{2\theta}}.$$

7. (i) Per il Teorema di arresto (visto che τ è quasi certamente finito):

$$0 = E(B_0) = E(B_{t \wedge \tau})$$

per $t \to +\infty$, per il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue, e usando che $-a \leq B_{t \wedge \tau} \leq b$, si ottiene:

$$0 = E(B_0) = E(B_{t \wedge \tau}) = -aP(B_\tau = -a) + bP(B_\tau = b) =$$

$$= -aP(B_\tau = -a) + b(1 - P(B_\tau = -a)) = b - (a+b)P(B_\tau = -a)$$

da cui segue che

$$P(B_\tau = -a) = \frac{b}{a+b}, \ P(B_\tau = b) = \frac{a}{a+b}$$

(ii) Ripetendo il ragionamento di sopra, siccome $X_t = B_t^2 - t$ è una martingala:

$$0 = E(X_0) = E(X_{t \wedge \tau}) = E(B_{t \wedge \tau}^2 - (t \wedge \tau))$$

per cui $E(B_{t \wedge \tau}^2) = E((t \wedge \tau))$; passando al limite per $t \to \infty$ ed usando il Teorema di Lebesgue e il Teorema di Beppo Levi, si ottiene:

$$E(B_\tau^2) = E(\tau) = a^2 P(B_\tau = -a) + b^2 P(B_\tau = b) = \frac{a^2 b + b^2 a}{a+b} = ab.$$

8. Per ogni λ, si ha che $M_t = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$ è una martingala. Poniamo per semplicità di notazione $\tau = \tau_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$. Se $t \leq \tau$ risulta $0 \leq M_t \leq e^a e^{-\lambda^2 t/2} \leq e^a$, quindi M_t è limitata per $t \leq \tau$.

Si ha $E(M_0) = E(M_{t\wedge\tau})$, dunque:

$$1 = E(M_0) = E(e^{\lambda B_{t\wedge\tau}} e^{-\lambda^2 t\wedge\tau/2}) = \lim_{t\to\infty} E(e^{\lambda B_{t\wedge\tau}} e^{-\lambda^2 t\wedge\tau/2})$$

e, per convergenza dominata, tale quantità è uguale a:

$$E(\lim_{t\to\infty} e^{\lambda B_{t\wedge\tau}} e^{-\lambda^2 t\wedge\tau/2}) = E(e^{\lambda B_\tau} e^{-\lambda^2\tau/2})$$

$$= E(e^{-\lambda B_\tau} e^{-\lambda^2\tau/2}|B_\tau = -a)P(B_\tau = -a) + E(e^{-\lambda B_\tau} e^{-\lambda^2\tau/2}|B_\tau = a)P(B_\tau = a)$$
$$= \frac{1}{2}(E(e^{\lambda a} e^{-\lambda^2\tau/2}) + E(e^{-\lambda a} e^{-\lambda^2\tau/2})) = \cosh(\lambda a)E(e^{-\lambda^2\tau/2}).$$

Dunque:

$$E(e^{-\lambda^2\tau/2}) = 1/\cosh(\lambda a).$$

Se $\lambda = \sqrt{2M}$, si ottiene:

$$E(e^{-M\tau}) = \frac{1}{\cosh(\sqrt{2M}a)}.$$

Se invece $\lambda = -i\sqrt{2M}$ (i è l' unità immaginaria, ovvero $i = \sqrt{-1}$), si ha:

$$E(e^{M\tau}) = \frac{1}{\cosh(-i\sqrt{2M}a)}.$$

Visto che $\cosh(-i\sqrt{2M}a) = \frac{1}{2}(e^{-ia\sqrt{2M}} + e^{ia\sqrt{2M}}) = \cos(a\sqrt{2M})$, si ottiene:

$$E(e^{M\tau}) = \frac{1}{\cos(\sqrt{2M}a)}$$

(ricordare che $cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$). Naturalmente occorre che $\cos(\sqrt{2M}a) > 0$, ovvero $0 < a < \frac{\pi}{2\sqrt{2M}}$.

9. (i) (a) Sia $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$ una partizione di $[0,t]$. La variazione è

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|$$

e, siccome N_t è non decrescente, si ottiene

$$V(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = \lim_{n\to\infty} [(N_{t_1} - N_0) + (N_{t_2} - N_{t_1}) + \ldots + (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})]$$

$$= N_t - N_0 = N_t$$

(b) Osserviamo che $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ può assumere solo valori 0 e 1 per piccoli valori dell'incremento $t_i - t_{i-1}$; stessa cosa vale per $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2$, che è quindi uguale a $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$. Allora, la variazione quadratica di N_t è:

$$\langle N_t \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) = N_t \equiv V(t).$$

(ii) Se $s < t$:

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s) = E(N_s + (N_t - N_s) - \lambda t|\mathcal{F}_s) =$$

$$= E(N_s|\mathcal{F}_s) + E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) - \lambda t =$$

(siccome N_s è $\mathcal{F}_s-$misurabile e $N_t - N_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$)

$$= N_s + E(N_t - N_s) - \lambda t = N_s + \lambda(t-s) - \lambda t = N_s - \lambda s = X_s$$

e quindi X_t è una martingala.
(iii) Se $s < t$:

$$E(Y_t|\mathcal{F}_s) = E((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s) = E(N_t^2 - 2\lambda t N_t + \lambda^2 t^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s) =$$

$$= E[(N_s + (N_t - N_s))^2 - 2\lambda t(N_s + (N_t - N_s)) + \lambda^2 t^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s] =$$

$$= E[N_s^2 + 2N_s(N_t - N_s) + (N_t - N_s)^2 - 2\lambda t N_s - 2\lambda t(N_t - N_s) + \lambda^2 t^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s] =$$

$$= E(N_s^2|\mathcal{F}_s) + 2N_s E(N_t - N_s) + E((N_t - N_s)^2) - 2\lambda t E(N_s|\mathcal{F}_s) - 2\lambda t E(N_t - N_s) + \lambda^2 t^2 - \lambda t =$$

$$= N_s^2 + 2N_s\lambda(t-s) + [\lambda(t-s) + \lambda^2(t-s)^2] - 2\lambda t N_s - 2\lambda t \cdot \lambda(t-s) + \lambda^2 t^2 - \lambda t$$

$$= \ldots = N_s^2 - 2\lambda N_s - \lambda s + \lambda^2 s^2 = (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s = Y_s$$

e quindi Y_t è una martingala.