

Probabilità condizionale, indipendenza

(Ω, \mathcal{A}, P) sp. di probabilità.

Def: $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$.

Si chiama probabilità condizionale di A rispetto a B

il numero:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La prob. condiz. è la prob. che A si verifichi, sapendo che B si è verificato.

Se, ed es, $B \subset A$ allora $P(A \cap B) = P(B)$ e

$P(A|B) = 1$ il che è logico giacché se $B \subset A$ vuol dire che $B \Rightarrow A$, ovvero se B si è verificato, certamente (con prob. 1) si verifica A.

Risulta $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, che vale

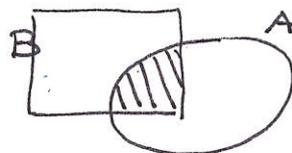
Esempio 1

Si gioca alla roulette i numeri 3, 13, 22... 7 possibili risultati su 37 (i numeri da 0 a 36).

Consideriamo la distrib. uniforme (equiprobabilità nello spazio degli eventi). La probabilità di vincere è $\frac{3}{37}$.

Supponiamo di sapere che il gioco è truccato in modo da far vincere un n° dispari (evento B). Qual è la prob. di vincere?

Se $A = \{3, 13, 22\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 35\}$



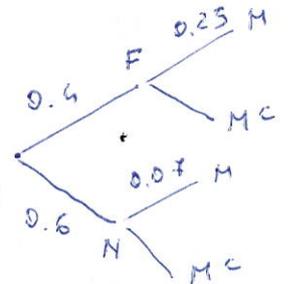
Il numero di casi favorevoli è 2 (3, 13 dispari, mentre 22 è pari); il n° dei casi possibili è 18.

$$\text{Dunque } P(A|B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{3, 13\})}{P(B)}$$

$$= \frac{2}{37} / \frac{18}{37} = \frac{2}{18}$$

Esempio 2

Una popolazione si compone per il 40% di fumatori (F) e per il 60% di non fumatori (N). Si sa che il 25% dei fumatori e il 7% dei non fumatori sono affetti da una certa malattia respiratoria cronica (M). Qual è la prob. che un individuo scelto a caso sia affetto dalla malattia?



Si ha: $P(F) = 0.4$; $P(N) = 0.6$
 $P(M|F) = 0.25$; $P(M|N) = 0.07$

Dunque:

(FORMULA PROB. TOTALI)

$$P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap N) = P(M|F) \cdot P(F) + P(M|N) \cdot P(N)$$
$$= 0.25 \cdot 0.4 + 0.07 \cdot 0.6 = \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{10} + \frac{7}{100} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10} + \frac{42}{1000}$$
$$= 0.142$$

FORMULA DI BAYES

Siano A_1, \dots, A_n eventi disgiunti ed esaustivi
 $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \Omega$. Allora:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) P(B|A_k)}$$

Infatti:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) P(B|A_i) \text{ e inoltre}$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \text{ unione disgiunta} \Rightarrow$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)$$

La formula di Bayes esprime $P(A_i|B)$ in funzione di $P(B|A_i)$

ESERCIZIO: $P(A \cap B \cap C) = P(C) \cdot P(B|C) \cdot P(A|B \cap C)$

Esempio 3

Con riferimento all'esempio 2, qual è la probabilità che una persona affetta dalla malattia respiratoria sia un fumatore? Per la f. di Bayes applicata alla partizione $\Omega = F \cup N$ si ha:

$$P(F|M) = \frac{P(F)P(M|F)}{P(M)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.142} = 0.704$$

Esempio 4 (Es. 1.7)

Due giocatori di tiro al bersaglio sparano allo stesso bersaglio. Si sa che il primo tiratore colpisce in media 9 volte su 10 colpi durante lo stesso tempo in cui il secondo giocatore ne spara 10. La precisione dei due tiratori non è la stessa: su 10 colpi sparati dal tiratore 1, 8 colpiscono il bersaglio, del tiratore 2 solo 7.

Durante il gioco, il bersaglio è stato colpito da un colpo, ma non si sa quale tiratore lo abbia sparato. Qual è la probabilità che il bersaglio sia stato sparato dal giocatore n° 2?

Sia A_1 = evento che un colpo è sparato dal giocatore 1
 A_2 = " " " " " 2

Possiamo supporre, tenendo conto dei dati, che

$$P(A_1) = \frac{9}{10} P(A_2). \text{ Sia } B = \text{evento che il bersaglio sia stato colpito.}$$

$$\text{Altrimenti ancora } P(B|A_1) = 0.8; \quad P(B|A_2) = 0.7$$

Dalla formula di Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{0.7 \cdot P(A_2)}{0.9 \cdot P(A_2) \cdot 0.8 + 0.7 \cdot P(A_2)}$$

$$= 0.493$$

N.B. $P(A_2)$ è incognito, ma il problema si può risolvere ugualmente.

OSS: $P(A_1|B) + P(A_2|B) = 1$..

INDIPENDENZA STOCASTICA

Def: $A, B \in \mathcal{A}$ sono indipendenti se

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Si dice, inoltre, che $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sono a due a due indep. se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j.$$

A_1, \dots, A_n sono una famiglia di eventi indep. se

$\forall k \in \mathbb{N}$, in ogni scelta di indici i_1, \dots, i_k :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Es: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ con la distrib. uniforme:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{1, 4\} \quad A_2 = \{2, 4\} \quad A_3 = \{3, 4\}$$

Risulta: A_1, A_2, A_3 sono indep. a due a due, ma:

~~$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$~~

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Se A e B sono indipendenti, dalle def. segue:

$$P(A|B) = P(A) \quad (P(B) > 0)$$

D'altra parte: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$

Dunque A, B indep \Rightarrow
$$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ e \\ P(B|A) = P(B) \end{cases}$$

Orvero; sapere se B^c è verificato o meno non aggiunge alcuna informazione sulla presenza di n verifichi A (B).

$$A, B \text{ indep} \Rightarrow A^c, B^c \text{ indep}; A, B^c \text{ indep} \\ A^c, B \text{ indep.}$$

Esempio (Lancio di una moneta)

Il lancio di una moneta dà testa con prob. p , $0 \leq p \leq 1$
 e croce con prob. $1-p$. La moneta viene lanciata
 n volte. Qual è la prob. di ottenere K
 lanci (e croce negli altri $n-K$)?

Possiamo supporre che il lancio sia indipendente l'uno
 dall'altro. Sia $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \omega_i = 0, \text{ oppure } 1\}$
 (1 se viene testa, 0 croce). Se $p = \frac{1}{2}$, allora

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\#\Omega}. \quad \text{Se } p \neq \frac{1}{2}, \text{ possiamo}$$

per $i=1, \dots, n$: $A_i = \{\omega \mid \omega_i = 1\}$ (evento che il
 lancio i -esimo dia ^{testa} ~~croce~~); dunque $P(A_i) = p$.

Se $A =$ evento che in ciascuno dei lanci, risulti

$$A = A_1 \cap \dots \cap A_K \cap A_{K+1}^c \cap \dots \cap A_n^c$$

~~oppure una combinazione di due lanci che dia stesso risultato~~

Allora, per l'indip. degli eventi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \dots P(A_K) \cdot P(A_{K+1}^c) \dots P(A_n^c) = \\ &= \underbrace{p \cdot p \dots p}_{K \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1-p) \dots (1-p)}_{n-K \text{ volte}} \\ &= p^K (1-p)^{n-K} \end{aligned}$$

~~La situazione dell'esempio si riferisce ad uno schema~~

~~successo-insuccesso (Testa-croce) o schema di Bernoulli.~~

+ Esempio 2 estr. senza rimpiazzo
 B_1, B_2 dipendenti

ESERCIZIO 1

$$P(A \cap B | C) = P(A | C) \cdot P(B | A \cap C)$$

Inferenza:

$$(1) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$(2) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(C)}$$

ESERCIZIO 2

$$P(A \cap B \cap C) = P(A | \{B \cap C\}) \cdot P(B | C) \cdot P(C)$$

Inferenza:

$$(2) \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \cdot P(C) = (1)$$

Esempio

Un certo Test del sangue è efficace al 99% nell'individuare una certa malattia. Si possono verificare più dei "falsi positivi" con probabilità μ (ovvero una persona sana che si sottopone al test, con prob μ risulta erroneamente malata).

Se l'incidenza della malattia sulla popolazione è dello 0.5%, qual è la prob. che un soggetto sia malato, condizionale al fatto che il Test sia positivo?

$M = \{\text{sofferto di malattia}\}$, $E = \{\text{il Test è positivo}\}$
Bayes

$$P(M|E) = \frac{P(E|M)P(M)}{P(E|M)P(M) + P(E|M^c)P(M^c)}$$

$$\frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + \mu \cdot 0.995} \hat{=}$$

Se $\mu = 0.001 \Rightarrow P(M|E) = 0.8326$
 $\mu = 0.0001 \Rightarrow \quad \quad \quad = 0.9802$
 $\mu = 0.005 \Rightarrow \quad \quad \quad = 0.4987$
• $\mu = 0.01 \Rightarrow \quad \quad \quad = 0.3322$