

Calcolo combinatorio

- Il # delle permutazioni di n elementi $\bar{e}$:
$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

Es. $X = \{a, b, c\}$

$$\{a, b, c\} \quad \{a, c, b\} \quad \{b, a, c\}, \quad \{b, c, a\} \\ \{c, a, b\} \quad \{c, b, a\} \quad 3! = 6$$

- Il # delle K -ple che si possono formare con n elementi $\bar{e}$: n^K

Es. $X = \{1, 2, 3\}$

$n = 3, \quad K = 2$

$$\{1, 1\} \quad \{2, 2\} \quad \{3, 3\} \quad \{1, 2\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\} \\ \{2, 1\} \quad \{3, 1\} \quad \{3, 2\}$$

- Il # delle disposizioni semplici di n elementi per $K \leq n$ $\bar{e}$ $D_{n,K} = \frac{n!}{(n-K)!}$

Es. $X = \{1, 2, 3\}$ (2 permutazioni el. distinti)

$$\{1, 2\} \quad \{1, 3\} \quad \{2, 3\}, \quad \{2, 1\} \quad \{3, 1\} \quad \{3, 2\}$$

$$D_{n,K} = 6 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1!}$$

- Il # delle combinazioni di n elementi per $K \leq n$ $\bar{e}$ $C_{n,K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \frac{1}{K!} D_{n,K}$

Es. $X = \{1, 2, 3\}$ $n = 3, K = 2$

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$

$$C_{n,K} = 3 = \frac{6}{2!}$$

(non importa l'ordine
 $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ contano
una sola volta)

Esempio 1

Si gioca al lotto la cinquina nica $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (i numeri
si scelgono
in una ruota. Qual è la prob. di vincere? (uscire nell'
ordine))

$$\Omega = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_5) : w_i \neq w_j, i=1, \dots, 5, w_i \in \{1, \dots, 90\}\}$$

$$\text{Allora } \# \Omega = D_{90,5} = \frac{90!}{85!} = \frac{85! \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{85!}$$

Se gli eventi elem. sono equiprobabili, la prob. cercata è

$$\bar{e} \quad \frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$$

Se avessimo giocato la cinquina semplice, con la quale si vince se i 5 numeri escono in un ordine qualunque,

allora $\# \Omega' = C_{90,5} = \frac{1}{5!} D_{90,5}$ e la prob. cercata

$$\bar{e} \quad p = \frac{1}{\frac{1}{5!} D_{90,5}} = \frac{5!}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90} > \text{di quella precedente.}$$

Esempio 2

Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Qual è la prob. di uscire K volte teste e $(n-K)$ volte croce?

Questa volta non supponiamo che esca teste ~~la~~ ^{per} prima K lanci, ma che esca K volte teste, in tutto.

Le possibili scelte di ~~un~~ elementi per K e K è $C_{n,K}$.

Dunque la prob. richiesta è:

$$\binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

$$\text{Qui abbiamo indicata } C_{n,K} = \frac{n!}{K!(n-K)!} \text{ con } \binom{n}{K}$$

(Sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{K=0}^n \binom{n}{K} a^K b^{n-K})$$

Gioco del Superenalotto.

Si giocano 6 numeri, trovare la probabilità di fare 6, o di fare 5.

$$\text{Intanto, } \binom{90}{6} = \frac{85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{6!}$$

$$= 622 \cdot 614 \cdot 630$$

Allora

$$\bullet \text{ Prob. di fare 6} = \frac{1}{622 \cdot 614 \cdot 630} \approx 1.6 \cdot 10^{-9}$$

Inoltre

$$\binom{89}{5} = \frac{85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89}{5!} = 41 \cdot 507 \cdot 642$$

Quindi:

$$\bullet \text{ Prob. di fare 5} = \frac{1}{\binom{90}{6}} + \frac{1}{\binom{89}{5}}$$

$$= \frac{1}{622 \cdot 614 \cdot 630} + \frac{1}{41 \cdot 507 \cdot 642} \approx$$

$$\approx 2.57 \times 10^{-8} > 1.6 \times 10^{-9} = \text{Prob. di fare 6}$$

Esempio 3

(Problema dei compleanni)

Qual è la prob. che tra n persone scelte a caso almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Siamo: $\Omega = \{w = (w_1, \dots, w_n) : w_i \in \{1, \dots, 365\}\} \quad (n < 365)$

$A \subset \Omega = \{w : w \text{ ha almeno due comp. uguali}\}$.

la prob. richiesta è $P(A)$.

$A^c = \{w \in \Omega : w \text{ ha tutte le componenti diverse}\}$

$$\# A^c = D_{365, n} = \frac{365!}{(365-n)!} ; \quad \# \Omega = 365^n$$

$$\text{Allora } P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{(365)^n} =$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-n+1) \cdot \cancel{(365-n)!}}{365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 \cdot (365-n)!} =$$

$$= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{(365-n+1)}{365}$$

$$\text{Se } n = 23 \quad P(A) = 0.507 > \frac{1}{2}$$

$$n = 50 \quad P(A) = 0.974$$

Esempio 4 (LEGGE IPERGEOMETRICA)

Da un'urna contenente b palline bianche e r rosse se ne estraggono $n \leq b+r$ senza rimpiazzamento. Qual è la prob. di esattamente k di esse siano rosse?

Sia $\Omega = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, b+r\})$, cioè $\# \Omega = C_{b+r, n}$.

Se le palline sono numerate da 1 a $b+r$ e quelle rosse hanno numeri $\leq r$, $A_k = \{w \in \Omega : w = (w_1, \dots, w_n) \text{ ha esattamente } k \text{ elementi con indice } \leq r\}$.

Si può mostrare che $\# A_k = C_{k, r} \cdot C_{n-k, b}$. Dunque:

$$P(A_k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} ; \quad p_k = P(A_k) \text{ è una prob. su } \{0, \dots, n\} \text{ che verifica l'ipergeometrica.}$$

Schema successo-insuccesso

- 1) In una scatola vi sono b palline bianche e r palline rosse. Si fanno n estrazioni a caso, con reinserimento.
(o con rimpiazzo).

Calcoliamo la probabilità di ottenere K palline rosse ($0 \leq K \leq n$).

Come nel caso di una moneta, per la quale la prob. di uscita di testa è p , in ogni estrazione, la prob. di estrazione di una pallina rossa è costante, ed è uguale a $p = \frac{r}{b+r}$.

Dunque, la prob. cercata è:

$$P(\# \text{ rosse} = K) = \binom{n}{K} \left(\frac{r}{b+r} \right)^K \left(\frac{b}{b+r} \right)^{n-K},$$

$$K = 0, 1, \dots, n.$$

Si tratta di uno schema a successo-insuccesso. Se tratta di uno schema a successo-insuccesso, in cui n prove ripetute, indipendenti, in cui la prob. del successo (uscita pallina rossa) è costante ($= p = \frac{r}{b+r}$) = [schema BINOMIALE]

2) Ora, effettuiamo n estrazioni
senza rimpiazzo, delle sfere scatole.

Calcoliamo di nuovo la prob. di
ottenere K palline rosse ($0 \leq K \leq n$).

Questa volta, la prob. del successo
(uscita della pallina rossa) non è
costante, durante l'esperimento aleatorio;
ma, infatti, dipende dalla composizione
delle palline nella scatola, che cambia
ad ogni estrazione successiva.

Risultato:

$$P(\# \text{ rosse} = K) = \frac{\binom{n}{K} \binom{b}{n-K}}{\binom{b+n}{n}}$$

[Schema IPERGEOMETRICO]

28 Da un'urna contenenti b palline bianche e r (145) palline rosse si viene estratta una di esse due volte di parte senza guardare. Qual è la prob. che la 2^a estratta sia bianca?

Sol.

Sia $B_2 = \{2^{\text{a}} \text{ estratta bianca}\}$

$B_1 = \{1^{\text{a}} \text{ estratta bianca}\}$, $R_1 = \{1^{\text{a}} \text{ estratta rossa}\}$

$$\text{Allora } B_2 = \cancel{B_1} (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap R_1) \Rightarrow$$

$$P(B_2) = \underbrace{P(B_2|B_1)}_{\cancel{P(B_1)}} P(B_1) + P(B_2|R_1) P(R_1)$$

$$\text{Ma } P(B_1) = \frac{b}{b+r}; \quad P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$

$$P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{b+r-1}; \quad P(B_2|R_1) = \frac{b}{b+r-1}$$

Quindi:

$$P(B_2) = \frac{b-1}{b+r-1} \cdot \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r-1} \cdot \frac{r}{b+r} =$$

$$= \frac{b}{(\cancel{b+r-1})(b+r)} [b-1+r] = \frac{b}{b+r}$$

• B_1 e B_2 non sono indipendenti:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1) P(B_1) =$$

$$\frac{b-1}{b+r-1} \cdot \frac{b}{b+r} \neq \left(\frac{b}{b+r}\right)^2 = P(B_1) P(B_2)$$

Esempio (2)

Qual è la prob. di fare terzino al lotto, giocando i numeri 3, 13 e 87 su una singola ruota?

Le 90 palline nell'urna del lotto si possono dividere in due gruppi: il I costituito dalle palline 3, 13, 87 ($\equiv$ palline bianche), il II da tutte le altre ($\equiv$ palline rosse). La prob. di fare terzino è la prob. che in 5 estrazioni senza rimpasto si abbiano 3 palline del I gruppo e 2 del secondo. Dunque, tale prob. è:

$$\frac{\binom{3}{3} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748} = 0.000085$$

Prob. di fare cinquo:

$$\frac{\binom{2}{2} \binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{88!}{3! 85!} \cdot \frac{5! 85!}{90!} = \frac{2}{9.89} \approx 0.0025$$

Prob. che il n. 1 esca in una singola estrazione

$$\frac{\binom{1}{1} \binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

EXERC.

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{k n! + n! (n-k+1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{n! (\cancel{k} + n - \cancel{k} + 1)}{k! (n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$