LEZIONE DI MERCOLEDI 11 MARZO 2020

Esercizi su Probabilità condizionata, indipendenza di eventi e Teorema di Bayes

OSSERVAZIONI:

E' importante capire la differenza tra P(A), probabilità (assoluta) di un evento A, e $P(A|B)= [P(A \cap B)] / P(B)$, probabilità condizionata di A su B, dove B è un evento con $P(B) > 0$.
P(A) rappresenta una valutazione di quanto sia verosimile il verificarsi dell'evento A, in assenza di altre informazioni, mentre P(A|B) rappresenta una tale valutazione, sapendo che l'evento B si è verificato.

Due eventi A e B sono stocasticamente indipendenti se risulta $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$, oppure $P(A|B) = P(A)$, e ancora $P(B|A)=P(A)$. La definizione di indipendenza in blocco di piu' di due eventi è un po' piu' complicata (vedi libro).
Nel caso si debba calcolare $P(A \cap B)$ con A e B **non** indipendenti, si puo' utilizzare la definizione di probabilità condizionata, per ottenere $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$.

Se $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ sono eventi esaustivi (la loro unione è Ω) e sono a due a due disgiunti, allora per un evento E vale la formula delle probabilità totali:

$$P(E)= P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + \ldots\ldots + P(E \cap A_n),$$

che è anche uguale a

$$P(E \mid A_1)\, P(A_1) + P(E \mid A_2)\, P(A_2) + \ldots\ldots + P(E \mid A_n)\, P(A_n).$$

Il teorema di Bayes afferma che:

$$P(A_i \mid E) = P(E \mid A_i)\, P(A_i) / P(E),$$

e permette di scambiare l'evento condizionante (A_i) con l'evento condizionato (E); si applica tutte le volte in cui è nota $P(E \mid A_i)$, e si vuole trovare $P(A_i \mid E)$.

SVOLGERE GLI ESERCIZI:

1.5, 1.6, 1.7, 1.10, 1.46, 1.51 del libro di Esercizi svolti

I TESTI E LE SOLUZIONI SONO NELLE PAGINE SEGUENTI

Capitolo 1

Esercizi di Probabilità discreta

▷ **Esercizio 1.1**
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eventi; provare che (disuguaglianze di Boole):

$$(i)\ P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

$$(ii)\ P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

▷ **Esercizio 1.2**
Si considerino n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tra loro indipendenti. Trovare la probabilità che nessuno di essi si verifichi.

▷ **Esercizio 1.3**
Risolvere l'esercizio precedente, senza l'ipotesi di indipendenza degli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

▷ **Esercizio 1.4**
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti e $P(A_i) = p,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Se a è un assegnato numero positivo, trovare il più piccolo intero positivo n per cui $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \geq a$.

▷ **Esercizio 1.5**
Trovare quali dei seguenti due eventi ha maggior probabilità di accadere:
A_1 = "esce almeno un asso nel lancio simultaneo di quattro dadi"; A_2 = "esce almeno un doppio asso in 24 lanci di una coppia di dadi".

▷ **Esercizio 1.6**
Una scatola contiene 5 pedine doppie del gioco del *domino* (una pedina si dice doppia se su entrambi i suoi lati, sinistro e destro, è segnato lo stesso numero); si sa che la prima pedina è un doppio 1, la seconda un doppio 2, e le altre pedine nella scatola sono, rispettivamente, un doppio 3, un doppio 4 e un doppio 5. Si estraggono a caso dalla scatola due pedine, senza rimpiazzo.
(i) Calcolare la probabilità che la prima pedina estratta sia contrassegnata con un numero pari.
(ii) Calcolare la probabilità che la seconda pedina estratta sia contrassegnata con un numero pari.
(iii) Calcolare la probabilità che entrambe le pedine estratte siano contrassegnate con numeri pari.

▷ **Esercizio 1.7**
Due giocatori di tiro al piattello sparano allo stesso bersaglio. Si sa che il primo concorrente spara in media 9 colpi, durante lo stesso tempo in cui il secondo ne spara 10. La precisione dei due giocatori non è la stessa: mediamente, su 10 colpi sparati dal primo concorrente, 8 colpiscono il bersaglio, su altrettanti sparati dal secondo giocatore solo 7 colpiscono il bersaglio. Durante il gioco, il bersaglio è stato colpito da un proiettile, ma non si sa chi abbia sparato. Qual è la probabilità che abbia sparato il secondo concorrente?

▷ **Esercizio 1.8**
Una macchina produce una vite al secondo. Nella fabbrica ci sono occasionali cadute di tensione, che si verificano ogni secondo con probabilità 0.09. Quando c'è una caduta di tensione, la macchina si arresta, perchè c'è un controllo elettronico. Qual è la probabilità che la macchina produca k viti, dopo che è stata messa in funzione?

▷ **Esercizio 1.9**
Siano X, Y due v.a. indipendenti con la stessa distribuzione geometrica. Calcolare $P(X = Y)$ e $P(X \geq 2Y)$.

▷ **Esercizio 1.10**
Una scatola contiene due schede: una di esse ha entrambi i lati rossi, mentre l'altra ha un lato rosso e uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati: è rosso. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia rosso?

▷ **Esercizio 1.11**
La probabilità che un bimbo esposto ad una malattia contagiosa la contragga è p.

▷ **Esercizio 1.45** (prova d'esame del 24/09/2003)
Una scatola contiene 6 bottoni: uno verde, 2 neri e 3 grigi. Si estraggono dalla scatola tre bottoni senza rimpiazzo.
(i) Qual è la probabilità che venga fuori un bottone verde?
(ii) Qual è la probabilità che venga estratto un bottone verde, sapendo che il verde non è uscito nelle prime due estrazioni?
(iii) Sapendo che nelle tre estrazioni è venuto fuori il bottone verde, qual è la probabilità che il verde non sia uscito nelle prime due estrazioni?

▷ **Esercizio 1.46** (prova in itinere a.a. 2003/04)
In una fabbrica che produce bombolette spray risulta che il 3% della produzione presenta delle imperfezioni, poiché il propellente contiene tracce di fluorocarburi, sostanze dannose all'ozono. Per questo motivo le bombolette vengono sottoposte ad una procedura di controllo, in seguito alla quale i pezzi difettosi (con fluorocarburi) vengono scartati con probabilità del 95%, ma anche i pezzi non difettosi (senza fluorocarburi) vengono scartati con probabilità 2%.
(i) Qual è la probabilità che una bomboletta prodotta superi il controllo e venga messa in commercio?
(ii) Qual è la probabilità che una bomboletta scartata sia invece priva di fluorocarburi?
(iii) Qual è la probabilità che una bomboletta messa in commercio contenga fluorocarburi?

▷ **Esercizio 1.47** (prova in itinere a.a. 2003/04)
Vengono estratte 4 carte senza reinserimento da un mazzo di carte napoletane. Se A è l'evento "ciascuna delle 4 carte estratte è un asso" e B è l'evento "delle 4 carte estratte una sola è un asso",
(i) calcolare $P(A)$ e $P(B)$.
(ii) Sia $X_i = 1$ se l'i-esima carta estratta è un asso, $X_i = 0$ altrimenti. Le variabili X_1 e X_2 sono indipendenti?
(iii) Rispondere ai quesiti (i) e (ii) nel caso che le estrazioni vengano effettuate con reinserimento.

▷ **Esercizio 1.48** (prova in itinere a.a. 2003/04)
Si lanciano ripetutamente e contemporaneamente una moneta equilibrata e due dadi perfetti. Sia T il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta testa e S il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta, con la somma dei dadi, il punteggio 5. Si può ritenere che T ed S siano v.a. indipendenti?
(i) Qual è la distribuzione di T? e di S?
(ii) Sia $X = \max(T, S)$, (dunque X rappresenta il numero minimo di lanci affinché, sia il numero delle teste uscite, che il numero di volte che si è ottenuto il punteggio 5, siano almeno uno). Trovare la densità discreta di X e $P(X = 4)$.
(iii) Calcolare $P(T = 2S)$.

(iv) Calcolare $P(T+S=3)$.

▷ **Esercizio 1.49** (prova d'esame del 1/07/2004)
Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggano 2 palline, una alla volta e senza reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità di estrarre una pallina pari e una dispari in questo ordine (cioè la probabilità che la prima pallina estratta sia pari e che la seconda pallina estratta sia dispari).
(ii) Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia pari, sapendo che la seconda pallina estratta è dispari.
(iii) In riferimento all'urna con la composizione iniziale (cioè contenente 5 palline numerate da 1 a 5), supponiamo di estrarre 3 palline, una alla volta e con reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre almeno 2 palline con un numero dispari.

▷ **Esercizio 1.50** (prova d'esame del 15/07/2004)
Per assemblare un sistema, si prendono a caso 6 componenti da una cassa contenente 20 componenti usati. Il sistema montato funziona solo se tra i 6 componenti impiegati quelli guasti non sono più di 2 (ovvero quelli funzionanti sono ≥ 4). Se nella cassa vi erano 15 componenti efficienti e 5 guasti, qual è la probabilità che il sistema funzioni?

▷ **Esercizio 1.51** (prova d'esame del 13/09/2004)
Supponiamo di avere una moneta truccata in modo che la probabilità che esca testa (T) in ogni lancio è $\frac{1}{4}$ (e quindi la probabilità che esca croce (C) in ogni lancio è $\frac{3}{4}$). Si lanci tale moneta 4 volte.
~~(i) Calcolare la probabilità che esca testa esattamente 2 volte.~~
~~(ii) Calcolare la probabilità che esca testa almeno una volta.~~
(iii) Calcolare la probabilità che si abbia la sequenza (T, C, T, C) esattamente in quest'ordine.

▷ **Esercizio 1.52** (prova d'esame del 24/09/2004)
Si consideri il seguente gioco. Si lancia una moneta equa: se esce testa si lancia un dado perfetto e si vince il gioco se esce il numero 1; se esce croce si lanciano due dadi perfetti e si vince il gioco se esce due volte il numero 1.
(i) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.
(ii) Calcolare la probabilità che sia uscita testa nel lancio iniziale di moneta, sapendo che si è vinto il gioco.
(iii) Calcolare la probabilità che, ripetendo più volte il gioco, si vinca il gioco per la prima volta al terzo tentativo.

Posto quindi $x = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, ed usando ancora la disuguaglianza $1-x \leq e^{-x}$, si otterrebbe

$$p \leq e^{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)},$$

e ritornerebbe il risultato dell'esercizio precedente.

▷ **Esercizio 1.4**
Se $P(A_k) = p,\ k = 1, \ldots, n$, si ha:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) =$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(A_k^c) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p) = 1 - (1-p)^n.$$

Per rispondere al quesito occorre trovare il più piccolo n per cui $1-(1-p)^n \geq a$, ovvero $\log(1-a) \geq n \log(1-p)$; di qui si ottiene che l'intero cercato è $\log(1-a) \cdot (\log(1-p))^{-1}$.

▷ **Esercizio 1.5**
Si tratta del famoso problema del Cavaliere di Méré; i dadi a cui egli si riferiva, e che sono tuttora utilizzati per giocare un poker semplificato, riportano al posto dei punti le immagini delle carte da poker, cioè *asso, re, regina, fante, dieci e nove.* L'evento "esce almeno un asso, lanciando 4 dadi", è il complementare dell' evento "non esce alcun asso, lanciando 4 dadi". Nell'ipotesi che i dadi non siano truccati, la probabilità di questo evento è $(\frac{5}{6})^4$, pertanto la probabilità che esca almeno un asso nel lancio simultaneo di 4 dadi è $p_1 = 1-(\frac{5}{6})^4 = 0.5177$ La probabilità che esca un doppio asso, lanciando una coppia di dadi (non truccati) è ovviamente $\frac{1}{36}$, mentre quella che non esca un doppio asso, lanciando una coppia di dadi è $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$. Dunque la probabilità che non esca mai un doppio asso, lanciando 24 volte una coppia di dadi, è $(\frac{35}{36})^{24}$; infine la probabilità p_2 che esca almeno un doppio asso in 24 lanci di una coppia di dadi si ottiene trovando il complemento a 1 dell' ultima probabilità calcolata, cioè $p_2 = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0.4914$. Il cavaliere di Méré ritenne erroneamente che p_1 fosse uguale a p_2.

▷ **Esercizio 1.6**
(i) Sia $\mathcal{P}_1$ l'evento "la prima pedina estratta è contrassegnata da un numero pari" e $\mathcal{D}_1$ l'evento "la prima pedina estratta è contrassegnata da un numero dispari" . Siccome i numeri pari tra $1, 2, 3, 4, 5$ sono 2, abbiamo 2 casi favorevoli su 5 in totale. Dunque la probabilità richiesta è $P(\mathcal{P}_1) = 2/5$. Si ha inoltre $P(\mathcal{D}_1) = 3/5$.

(ii) Indichiamo con $\mathcal{P}_2$ l'evento "la seconda pedina estratta è contrassegnata con un numero pari". Si ha, per la formula della probabilità totale:

$$P(\mathcal{P}_2) = P(\mathcal{P}_2|\mathcal{P}_1)P(\mathcal{P}_1) + P(\mathcal{P}_2|\mathcal{D}_1)P(\mathcal{D}_1)$$

Siccome

$$P(\mathcal{P}_2|\mathcal{P}_1) = 1/4, \quad P(\mathcal{P}_2|\mathcal{D}_1) = 2/4 = 1/2,$$

sostituendo nella formula di sopra, troviamo:

$$P(\mathcal{P}_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\ .$$

(iii) Si ha:

P(P1 intersez. P2) = P(P2 | P1) P(P1) = 1/4 * 2/5 = 1/10.

▷ **Esercizio 1.7**

Denotiamo con A_1 l'evento "un colpo viene sparato dal concorrente n. 1" e con A_2 l'evento "un colpo viene sparato dal concorrente n. 2". Considerato il rapporto tra il numero medio di colpi sparati dal primo giocatore e il numero medio di colpi sparati dal secondo, è ragionevole supporre che $P(A_1) = 0.9 \cdot P(A_2)$. Sia ora B l'evento che il bersaglio sia stato colpito. Dai dati sulla precisione di tiro dei due giocatori segue che $P(B|A_1) = 0.8$ e $P(B|A_2) = 0.7$. Per la formula di Bayes, si ottiene allora che la probabilità cercata è:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{0.7 \cdot P(A_2)}{0.9 \cdot P(A_2) \cdot 0.8 + 0.7 \cdot P(A_2)} = 0.493 \; .$$

▷ **Esercizio 1.8**
Dai dati del problema segue che la macchina, finché è in funzione, produce una vite ogni secondo. Se la caduta di tensione (con conseguente interruzione della corrente di alimentazione) avviene dopo k secondi, la macchina avrà prodotto k viti. Quindi la probabilità che la macchina produca k viti, dopo che è stata messa in funzione, non è altro che la probabilità che la prima interruzione avvenga esattamente all'istante k (sec). L'istante di prima interruzione è dunque l'istante T di primo successo in uno schema di prove Bernoulliane ed indipendenti, in cui la probabilità del successo (interruzione della corrente) in ogni prova è $p = 0.09$; come è noto la v.a. $T - 1$ ha legge geometrica di parametro p, ovvero:

$$P(T = k) = p(1-p)^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Pertanto la probabilità richiesta è $0.09 \cdot (0.91)^{k-1}$.

▷ **Esercizio 1.9**
Siccome X e Y sono v.a. geometriche di parametro p, si ha:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k, \; k = 0, 1, \ldots$$

L'evento $\{X = Y\}$ si può scrivere come unione numerabile di eventi disgiunti, e dei quali si sa calcolare la probabilità, nel seguente modo:

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X = k, Y = k\}$$

Pertanto, per la $\sigma-$additività, si ha:

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) P(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2 (1-p)^{2k} =$$

$$= \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p} \; .$$

Si ha poi:

$$P(X \geq 2Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k, X \geq 2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k)P(X \geq 2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p(1-p)^k \sum_{h=2k}^{\infty} p(1-p)^h \right) .$$

Per effettuare il calcolo, troviamo prima la somma della serie interna:

$$\sum_{h=2k}^{\infty} p(1-p)^h;$$

essa è uguale a

$$\sum_{h=0}^{\infty} p(1-p)^h - \sum_{h=0}^{2k-1} p(1-p)^h =$$

(ricordando i risultati per la serie geometrica)

$$= p\left(\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1-(1-p)^{2k}}{1-(1-p)}\right) = (1-p)^{2k}.$$

Riprendendo il calcolo di sopra, si ha allora:

$$P(X \geq 2Y) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k(1-p)^{2k} =$$

$$= p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)^3)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{1}{p^2-3p+3} .$$

▷ **Esercizio 1.10**

Se denotiamo con A l'evento "viene estratta la scheda con entrambi i lati rossi" e con B l'evento "viene estratta la sheda con un lato rosso e uno bianco", si ha ovviamente $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Sia ora E l'evento che uno dei lati della carta estratta sia rosso (se ne guarda solo un lato); si ha, naturalmente, $P(E|A) = 1$ e $P(E|B) = 1/2$. Dunque:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} .$$

Per la formula di Bayes, la probabilità che anche il secondo lato sia rosso è:

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}^2} = \frac{2}{3} \; .$$

▷ **Esercizio 1.11**

(i) Occorre richiamare la v.a. $T_k \in \{1, 2, \ldots\}$ detta *istante di $k-$esimo successo*, in uno schema successo-insuccesso di prove Bernoulliane e indipendenti, in cui la probabilità del successo in ogni prova è p. Per $k = 1$, abbiamo la cosiddetta v.a. *istante di primo successo* T_1 che, come sappiamo, ha legge geometrica modificata di parametro p (v. Esercizio 1.8); per $k > 1$, la legge di T_k è la cosiddetta *distribuzione binomiale negativa* o *di Pascal*. Allo scopo di calcolare la densità discreta di T_k per un fissato intero k, denotiamo con A l'evento "si sono avuti esattamente $k-1$ successi nelle precedenti $i-1$ prove" e con B l'evento "la prova $i-$esima è stata un successo". Si ha, dalla legge binomiale:

$$P(A) = \binom{i-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{i-1-k+1}, \; P(B) = p.$$

Allora, la legge di T_k è ($k \leq i$, $i = 1, 2, \ldots$) :

$$P(T_k = i) = P(k\text{−esimo successo si ha all'}i\text{−esima prova }) =$$

$$= P(A \cap B) = P(A)P(B) =$$

$$= \binom{i-1}{k-1} p^k (1-p)^{i-k}.$$

Tornando al caso del nostro esercizio, è $p = 0.2$, $k = 3$, e $i = 12$. Pertanto, la probabilità richiesta è:

$$P(T_3 = 12) = \binom{11}{2} (0.2)^3 \cdot (0.8)^9 \cong 0.0591 \; .$$

(ii) Il numero X dei bimbi che contraggono la malattia, ha legge binomiale di parametri $n = 5000$ e $p = 10^{-3}$. Quindi la probabilità cercata è:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{5000}{0} (1-p)^{5000} + \binom{5000}{1} p(1-p)^{4999} + \binom{5000}{2} p^2(1-p)^{4998}.$$

Questi calcoli sono impossibili da svolgersi praticamente, almeno utilizzando una normale calcolatrice tascabile. Possiamo però utilizzare il Teorema di Poisson, secondo il quale la legge di una v.a. binomiale X di parametri n e p, tende,

▷ **Esercizio 1.46**
Indichiamo con D l'evento che una bomboletta scelta a caso sia difettosa e con D^c quello che non sia difettosa. Inoltre sia S l'evento che una bomboletta venga scartata ed S^c l'evento che essa invece superi il controllo e venga messa in commercio.
(i) Si ha:

$$P(S^c) = P(S^c \cap D) + P(S^c \cap D^c) = P(S^c|D)P(D) + P(S^c|D^c)P(D^c).$$

Inserendo i dati, si ottiene:

$$P(S^c) = 0.05 \cdot 0.03 + 0.98 \cdot 0.97 = 0.952 \ .$$

(ii) Per il teorema di Bayes:

$$P(D^c|S) = \frac{P(S|D^c)P(D^c)}{P(S|D^c)P(D^c) + P(S|D)P(D)} \ .$$

Sostituendo le probabilità note, si ottiene:

$$P(D^c|S) = \frac{0.02 \cdot 0.97}{0.02 \cdot 0.97 + 0.95 \cdot 0.03} = 0.405 \ .$$

(iii) Sempre per il teorema di Bayes:

$$P(D|S^c) = \frac{P(S^c|D)P(D)}{P(S^c|D)P(D) + P(S^c|D^c)P(D^C)} \ .$$

Sostituendo le probabilità note, si ottiene:

$$P(D^c|S) = \frac{0.05 \cdot 0.03}{0.05 \cdot 0.03 + 0.98 \cdot 0.97} = 0.0015 \ .$$

▷ **Esercizio 1.47**
(i) Sia X il numero di assi ottenuti in 4 estrazioni senza reinserimento, le carte del mazzo possono dividersi in due gruppi: gli assi (in numero di 4) e le rimanenti carte (in numero di 36.) Allora X conta il numero di elementi del primo gruppo usciti in $n = 4$ estrazioni senza reinserimento, dunque X è una v.a ipergeometrica e, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, si ha:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{36}{4-k}}{\binom{40}{4}} \ .$$

e la probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 4) = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2} + \binom{15}{5}\binom{5}{1} + \binom{15}{6}\binom{5}{0}}{\binom{20}{6}} = 0.8687 \ .$$

▷ **Esercizio 1.51**

Se X è il numero di teste ottenute, allora X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p = \frac{1}{4}$.

(i) La probabilità richiesta è:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{54}{256} \cong 0.2109 \ .$$

(ii) La probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \cong 0.6835 \ .$$

(iii) Siccome gli esiti dei singoli lanci della moneta sono indipendenti, se indichiamo con R_i, $R = T, C$ il risultato della i-esima estrazione, $i = 1, \ldots, 4$, la probabilità richiesta è:

$$P(T_1 \cap C_2 \cap T_3 \cap C_4) = P(T_1)P(C_2)P(T_3)P(C_4) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{256} \cong 0.0351 \ .$$

▷ **Esercizio 1.52**

Siano T e C gli eventi "la moneta lanciata dà testa" e "la moneta lanciata dà croce", e sia V l'evento "si vince il gioco". Allora:

$$P(T) = P(C) = \frac{1}{2}; \ P(V|T) = \frac{1}{6}; \ P(V|C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \ .$$

(i) La probabilità richiesta è:

$$P(V) = P(V \cap T) + P(V \cap C) = P(V|T)P(T) + P(V|C)P(C) =$$