

1 Calcoli con densità per v.a. discrete

Problema 1. Due monete identiche vengono lanciate più volte fino a che entrambe abbiano ottenuto almeno una volta Testa, Qual è la probabilità che occorran esattamente k lanci?

Soluzione Siano S e T i numeri di lanci necessari affinché la I, rispettivamente la II moneta, dia Testa. sappiamo che $S - 1$ e $T - 1$ hanno distribuzione Geometrica di parametro p , dove $p =$ probabilità che esca Testa in un lancio (con la I o la II moneta). Quindi

$$P(S = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

e

$$P(T = h) = p(1 - p)^{h-1}, \quad h = 1, 2, \dots$$

Inoltre, possiamo ritenere che S e T siano v.a. indipendenti.

La v.a. $Z = \max\{S, T\}$ assume valori $\{1, 2, \dots\}$; si tratta di calcolare $P(Z = i)$, $i = 1, 2, \dots$. Per calcolare la densità discreta di $Z = \max\{S, T\}$, procediamo nel modo seguente.

Abbiamo visto in precedenza che, essendo S e T Geometriche modificate di parametro p , risulta

$$P(S > n) = P(T > n) = (1 - p)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

e quindi anche

$$P(S \leq n) = P(T \leq n) = 1 - (1 - p)^n.$$

Quindi, per $i = 1, 2, \dots$:

$$P(Z \leq i) = P(\max\{S, T\} \leq i) = P(S \leq i, T \leq i)$$

ed essendo S e T indipendenti, l'ultima probabilità è uguale a

$$P(S \leq i)P(T \leq i) = [1 - (1 - p)^i][1 - (1 - p)^i] = [1 - (1 - p)^i]^2.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} P(Z = i) &= P(Z \leq i) - P(Z \leq i - 1) = [1 - (1 - p)^i]^2 - [1 - (1 - p)^{i-1}]^2 \\ &= [1 - (1 - p)^i + 1 - (1 - p)^{i-1}][1 - (1 - p)^i - 1 + (1 - p)^{i-1}] \end{aligned}$$

(abbiamo usato che $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

$$= [2 - (1 - p)^{i-1}(1 - p + 1)][(1 - p)^{i-1}p].$$

Se, per es. le due monete sono eque, allora $p = 1/2$ e si ha:

$$\begin{aligned} P(Z = i) &= \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{3}{2} \right] \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{3}{4} \frac{1}{4^{i-1}}. \end{aligned}$$

2. Supponiamo ora, invece, che le monete non sono equilibrate e che la probabilità che la prima moneta dia Testa è p , mentre la probabilità che la seconda moneta dia Testa è

q . Vogliamo ora trovare la densità di $Y = \min\{S, T\}$, ovvero il minimo lancio necessario affinché una delle due monete (**non entrambe**, come prima) dia Testa per la prima volta. La v.a. Y assume valori in $\{1, 2, \dots\}$. Procediamo al seguente modo. Per $i = 1, 2, \dots$:

$$P(Y > i) = P(S > i, T > i)$$

e, per l'indipendenza tale probabilità è uguale a

$$P(S > i)P(T > i) = (1 - p)^i(1 - q)^i.$$

Quindi:

$$P(Y > i) = [(1 - p)(1 - q)]^i = (1 - \theta)^i,$$

dove abbiamo posto $1 - \theta = (1 - p)(1 - q)$, ovvero $\theta = q + p - pq$.

Dunque, riconosciamo che Y ha distribuzione geometrica modificata di parametro θ , cioè $Y - 1$ ha distribuzione Geometrica di parametro θ . Riassumendo, abbiamo ottenuto che, se S ha distribuzione Geometrica modificata di parametro p e T ha distribuzione Geometrica modificata di parametro q , e S e T sono indipendenti, allora

$$Y - 1 = \min\{S, T\} - 1 \sim \text{Geom}(q + p - pq),$$

ovvero

$$P(Y = i) = (q + p - pq)(1 - q - p + pq)^{i-1}.$$

Per esercizio, si potrebbe calcolare la densità discreta di $Z = \max\{S, T\}$ nel caso in cui le probabilità di uscita di Testa per le due monete non siano uguali, ovvero siano p e q , rispettivamente. Basterà rifare i calcoli del punto 1., utilizzando però che

$$P(S = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

e

$$P(T = h) = q(1 - q)^{h-1}, \quad h = 1, 2, \dots$$

con p e q eventualmente diversi.

Svolgiamo ora gli esercizi 1.9, 1.20, 1.41

▷ **Esercizio 1.9**

Siano X, Y due v.a. indipendenti con la stessa distribuzione geometrica. Calcolare $P(X = Y)$ e $P(X \geq 2Y)$.

Soluzione. Siccome X e Y sono v.a. geometriche di parametro p , si ha:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

L'evento $\{X = Y\}$ si può scrivere come unione numerabile di eventi disgiunti, e dei quali si sa calcolare la probabilità, nel seguente modo:

$$\{X = Y\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X = k, Y = k\}$$

Pertanto, per la σ -additività, si ha:

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = k) =$$

(per l'indipendenza di X e Y)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(1-p)^{2k} = \\ &= \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k, X \geq 2k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k)P(X \geq 2k); \end{aligned}$$

osserviamo ora che

$$P(X \geq 2k) = P(T \geq 2k + 1) = P(T > 2k) = (1-p)^{2k},$$

dove abbiamo posto $T = X + 1$, cioè una v.a. Geometrica modificata di parametro p . Riprendendo il calcolo di sopra, si ha allora:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k(1-p)^{2k} = \\ &= p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^3)^k = p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^3} = \frac{1}{p^2 - 3p + 3}. \end{aligned}$$

▷ **Esercizio 1.20**

Due dadi equilibrati vengono lanciati separatamente più volte. Indichiamo con X il numero di lanci necessario ad ottenere 3 gettando il primo dado, e con Y il numero dei lanci necessario a ottenere 2 oppure 5 lanciando il secondo.

- (i) Qual è la legge di X ? e di Y ?
- (ii) Trovare la densità discreta di $Z = \max(X, Y)$.
- (iii) Calcolare $P(X \geq Y)$.

Soluzione. (i) X è l'istante di primo successo in uno schema di prove indipendenti e Bernoulliane, in cui la probabilità del successo in ciascuna prova è $p = 1/6$. Analogamente, Y è il tempo di primo successo in uno schema di prove indipendenti e Bernoulliane, in cui la probabilità del successo in ciascuna prova è $p' = 2/6 = 1/3$. Le v.a. X e Y hanno dunque legge geometrica modificata di parametro p e p' , rispettivamente, ovvero risulta, per $k = 1, 2, \dots$:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad P(Y = k) = p'(1-p')^{k-1}.$$

(ii) Se $Z = \max(X, Y)$, si ha, per $k = 1, 2, \dots$:

$$P(Z \leq k) = P(X \leq k, Y \leq k)$$

che, per l'indipendenza di X e Y , e utilizzando i risultati trovati sopra vale:

$$P(X \leq k)P(Y \leq k) = [1 - (1 - p)^k][1 - (1 - p')^k].$$

Allora:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1) = \\ &= [1 - (1 - p)^k][1 - (1 - p')^k] - [1 - (1 - p)^{k-1}][1 - (1 - p')^{k-1}]. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori $p = 1/6$ e $p' = 1/3$, si ottiene ($k = 1, 2, \dots$):

$$P(Z = k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right] \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right] - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right] \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right];$$

svolgendo i calcoli, si ottiene infine:

$$P(Z = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}.$$

(iii) Si ha:

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k, Y = k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)P(Y = k). \end{aligned}$$

Ora

$$P(X \geq k) = P(X > k - 1) = (1 - p)^{k-1},$$

avendo X distribuzione Geometrica modificata di parametro p . Allora, riprendendo il calcolo:

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} ((1 - p)^{k-1} p' (1 - p')^{k-1}) = \\ &= p' \sum_{k=1}^{\infty} ((1 - p)(1 - p'))^{k-1} = \frac{p'}{1 - (1 - p)(1 - p')} = \\ &= \frac{p'}{p' + p(1 - p')}. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori noti per p e p' , si trova infine $P(X \geq Y) = 3/4$.

▷ **Esercizio 1.41** (prova in itinere a.a. 2002/03)

Una scatola contiene 5 lampadine gialle e 1 blu; una seconda scatola contiene 8 lampadine rosse e 7 bianche. Vengono effettuate estrazioni successive da ciascuna delle due scatole, con rimpiazzo e separatamente, senza mischiare le lampadine tra le due scatole. Sia X_1 il numero delle estrazioni dalla prima scatola necessario ad ottenere una lampadina blu e X_2 il numero di estrazioni dalla seconda scatola per ottenere una lampadina bianca.

- (i) Qual è la legge di X_1 ? e di X_2 ?
(ii) Trovare la densità discreta di $Z = \min(X_1, X_2)$.
(iii) Calcolare $P(X_1 = X_2)$.

Soluzione. X_1 e X_2 sono istanti di primo successo e si ha, per $k = 1, 2, \dots$:

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}; \quad P(X_2 = k) = \frac{7}{15} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1}.$$

(ii) Se $Z = \min(X_1, X_2)$, si ha $P(Z \geq k) = P(X_1 \geq k, X_2 \geq k)$ che, per l'indipendenza, è uguale a $P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k)$. Ma:

$$P(X_1 \geq k) = 1 - P(X_1 < k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \dots = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Analogamente:

$$P(X_2 \geq k) = 1 - P(X_2 < k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{7}{15} \left(\frac{8}{15}\right)^{i-1} = \dots = \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1}.$$

Dunque, riprendendo il calcolo di sopra:

$$P(Z \geq k) = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{15}\right)^{k-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (*)$$

da cui:

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1},$$

ovvero Z ha distribuzione Geometrica modificata, di parametro **5/9**. A questo risultato si poteva pervenire subito, notando che $P(Z \geq k) = P(Z > k - 1)$ e quindi, per (*):

$$P(Z > k - 1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

il che vuol dire che Z ha distribuzione Geometrica modificata, di parametro **5/9**.

(iii)

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{7}{15} \left(\frac{8}{15}\right)^{k-1} = \frac{7}{90} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{7}{90} \cdot \frac{9}{5} = \frac{7}{50} = 0.14. \end{aligned}$$