LEGGI (O DISTRIBUZIONI) CONGIUNTE, INDIPENDENZA

Def: un'applicazione $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

si dice v.a. n-dimensionale se $X_i(\omega)$ sono v.a., $i = 1 \dots n$

Se X è una v.a. discreta n-dimensionale, essa può assumere al più un'infinità numerabile di valori.

Se X_i può assumere n_i valori, allora X può assumere al più $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_n$ valori.

Es $(n = 2)$

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Se $X(\omega) \in \underbrace{\{x_1, \dots x_n\}}_{= A}$ e $Y(\omega) \in \underbrace{\{y_1, \dots y_m\}}_{= B}$

$$X(\omega) \in A \times B$$

Poniamo: $P\{X(\omega) = (x_i, y_j)\} = p_{ij}$, $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots m$

$= p(x_i, y_j)$ funzione di prob. congiunta

$$P(X \in A) = \sum_{\substack{i,j:\\ (x_i, y_j) \in A}} p_{ij}$$

Se $X = (X_1, \dots X_n)$ è una v.a. n-dimensionale con densità (discreta) congiunta $p(x_1, \dots x_n)$, le densità $p_1, \dots p_n$ delle v.a. $X_1, \dots X_n$ si dicono le densità marginali di X

Es $(n=2)$

$\underline{X} = (X, Y)$ con densità congiunte p_{ij}.

Allora le densità marginali di $X \in \{x_1, \dots x_n\}$ è:

$p_1(x_i) = p_i = P(X = x_i) = P(\{X = x_i, Y = y_1\} \cup$

$\cup \{X = x_i, Y = y_2\} \cup \dots \cup \{X = x_i, Y = y_m\}) =$

$= p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \dots + p(x_i, y_m) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) =$

$= \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$

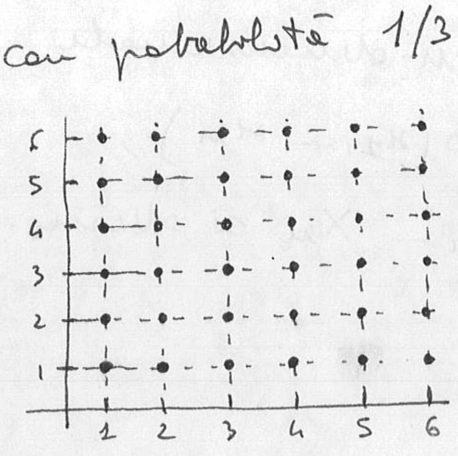
Analogamente:

$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Esempio

I) Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 ne vengono estratte due con rimpiazzo. Indichiamo con X e Y i risultati delle due estrazioni e calcoliamo la distrib. congiunta di $Z = (X, Y)$.

I possibili valori di Z sono le coppie (i, j) dove i e j possono assumere i valori interi da 1 a 6. Sono in tutto 36 coppie possibili ed ogni coppia (i, j) verrà assunta con probabilità $1/36$ (eventi indipendenti) $p_{ij} = 1/36$



Le v.a. X e Y prendono entrambe i valori interi da 1 a 6, tutti con prob. $1/6$. Dunque entrambe le distrib. marginali di Z sono le distrib. uniformi su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\cdots$	$p(x_n, y_1)$	$P(y_1)$
y_2	$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\cdots$	$p(x_n, y_m)$	$P(y_m)$
	$P(x_1)$	$P(x_2)$		$P(x_n)$	

<u>densité marginale</u>

II) effettuiamo ora invece due estrazioni senza rimpiazzo che indichiamo con $Z' = (X', Y')$

I valori della v.a. Z' non sono gli stessi di Z. Ad es, il valore $(1,1)$ non può essere assunto, come pure non possono essere assunti i valori (i,i) $i = 1, 2, \dots 6$.

Dunque i risultati possibili sono quelli in figura meno quelli sulla diagonale. In tutto sono

$36 - 6 = 30$ e $p'_{ij} = 1/30$.

Dunque $p_{ij} = 1/36 < p'_{ij} = 1/30$ $i \neq j$

mentre $p_{ii} = 1/36$ e $p'_{ii} = 0$.

<u>Comunque le distrib. marginali di X' e Y' sono ancora quelle uniformi su $\{1, \dots 6\}$ e quindi sono uguali a quelle di X e Y, anche se le distrib. congiunte di (X, Y) e (X', Y') sono diverse.</u>

<u>Conclusione</u>: dalla distrib. congiunta è possibile risalire, <u>in modo unico</u> alle distrib. marginali, il viceversa non è (in generale) possibile.

PROP 1. (La somma di v. binomiali è una binomiale)

Siano $X_1, \dots X_m$ v.a. indipendenti ~~di~~ Binomiali di legge $B(n_1,p)$, $B(n_2,p) \dots B(n_m,p)$. Allora la loro somma $X_1+X_2+\dots+X_m$ ha legge $B(n,p)$ dove $n=n_1+\dots+n_m$.

Dim.

Per semplicità supponiamo $m=2$.

Osserviamo prima che, se X è una v.a. binomiale di legge $B(K,q)$, allora si può scrivere $X = U_1+U_2+\dots U_K$, dove U_K sono v.a. indipendenti con legge di Bernoulli $B(1,q)$. (Dunque $U_i \in \{0,1\}$; $P(U_i=1)=q$; $P(U_i=0) = 1-q$).

Dobbiamo dimostrare che se $X_1 \sim B(n_1,p)$ e $X_2 \sim B(n_2,p)$ allora $X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,p) = B(n,p)$, $n=n_1+n_2$.

Per l'osservazione di sopra, possiamo scrivere:

$X_1 = U_1+U_2+\dots+U_{n_1}$ ove U_i sono $B(1,p)$

$X_2 = V_1+V_2+\dots+V_{n_2}$ ove V_i sono $B(1,p)$

inoltre le U_i sono indip. da V_j.

Allora: $X_1+X_2 = (U_1+\dots+U_{n_1})+(V_1+\dots+V_{n_2})$

$$= \sum_{k=1}^{n_1+n_2} W_k \quad , \quad W_k \sim B(1,p)$$

Dunque $X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$ ∎

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{K} \binom{n}{l}\binom{m}{K-l} = \cancel{\sum_{l=0}^{n+m}} \binom{n+m}{K}$$

Definizione

X, Y v.a. discrete si dicono indipendenti se
$\forall\ A, B \subset \mathbb{R}$ si ha:
$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

Oss.

Se $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ e X e Y sono indip. segue
$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$
cioè, ~~se~~ $p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$

(oppure $p_{ij} = p_i \cdot p_j$)

Oss.

La definizione si può generalizzare ad un numero maggiore di 2 di v.a.

Es.

Sia $X \sim B(n, p)$ e $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
ove $X_i \sim B(1, p)$ (variabili 0-1)
Allora $(X_1, X_2, \dots X_n)$ sono indipendenti.
Infatti $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_n = x_n) =$
$$= p^k (1-p)^{n-k} = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$
ove k è il numero dei valori x_i che sono uguali a 1.

Es.

Riprendiamo l'esempio delle 6 palline estratte dall'urna con o senza rimpiazzo.
La distrib. congiunta di $Z = (X, Y)$ nel caso di rimpiazzo ha f. di prob. $p_{ij} = \frac{1}{36}$, mentre

$p_i = p_j = \frac{1}{6}$. Dunque $p_{ij} = p_i \cdot p_j$

e X, Y sono indipendenti.

Nel caso in cui non si reimpostano le palline, si ha: $p_{ij} = \frac{1}{30} \neq p_i \cdot p_j = \frac{1}{36}$.

In questo caso X e Y non sono indipendenti.

Def.
Se X e Y hanno densità congiunta $p(x,y)$, si chiama densità condizionale di X dato $Y=y$ la quantità:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

se $p_Y(y) > 0$ e $p_{X|Y}(x|y) = 0$ altrimenti.

Analogamente si definisce la densità condizionale di Y dato $X = x$.

Si ha: $$\sum_x p_{X|Y}(x|y) = \sum_x \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} =$$

$$= \frac{1}{p_Y(y)} \sum_x p(x,y) = \frac{p_Y(y)}{p_Y(y)} = 1$$

Allora, come funzione della variabile x, la densità condizionale di X dato $Y=y$ è una densità.
Essa è la densità di X sapendo che Y ha assunto il valore y.
Se X e Y sono indip. e $p_Y(y) > 0$, si ha:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)\, \cancel{p_Y(y)}}{\cancel{p_Y(y)}} = p_X(x).$$

PROP. 2

Siano X e Y v.a. discrete con f. di prob. (densità) congiunta $p(x,y)$. Allora $Z = X+Y$ ha densità:

$$\boxed{g(z) = \sum_{x\in\mathbb{R}} p(x, z-x)}$$

Dim.

$$\cancel{P\{Z=z\} = P\{X+Y=z\}}.$$

Osserviamo che, se $\underline{X}$ è una v.a. d-dimensionale e di distrib. congiunta nota $(p(\underline{x}))$, $\underline{x}\in\mathbb{R}^d$ e $\phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione, allora:

$$P\{\phi(\underline{X})=z\} = P\{\underline{X}\in\phi^{-1}(z)\} = \sum_{\underline{x}\in\phi^{-1}(z)} p(\underline{x})$$

In particolare, se $d=2$:

$p(\underline{x}) = p(x,y)$, $\phi: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$P\{\phi(X,Y)=z\} = \sum_{(x,y)\in\phi^{-1}(z)} p(x,y). \qquad (*)$$

Applichiamo la $(*)$ con $\phi(x,y)=x+y$.

In effetti $\phi^{-1}(z) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=z\} =$

$= \{(x,z-x),\ x\in\mathbb{R}\}$

Poiché $\phi(X,Y)=X+Y=Z$, otteniamo:

$$P(Z=z) = P(X+Y=z) = P(\phi(X,Y)=z) =$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{R}} p(x, z-x)$$

X, Y indip $\Rightarrow$ $\phi(X)$, $\psi(Y)$ indip. se ϕ, ψ invertibili

$P(\phi(X)=\phi(x_i), \psi(Y)=\psi(y_j)) = P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$= P(\phi(X)=\phi(x_i))\cdot P(\psi(Y)=\psi(y_j))$

PROP. 2

Se X e Y sono indipendenti e di densità p_1 e p_2 risp., allora:

$$g(z) = \sum_{x \in \mathbb{R}} p_1(x)\, p_2(z-x)$$

Dim.

Basta osservare che, in questo caso, $p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$ ∎

ESEMPIO (SOMMA DI V.A. DI POISSON)

Siano X e Y v.a. indipendenti di legge di Poisson di parametro λ e μ risp. Allora $X+Y$ ha legge di Poisson, di parametro $\lambda+\mu$.

Dim.

Per la Prop. 2:

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k} p_1(i)\, p_2(k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i}}_{(\lambda+\mu)^k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

Ricordare che ~~la~~ una v. di Poisson assume solo valori interi $i \in \mathbb{N}$. Dunque $p_1(x) \neq 0$ solo se x è intero ≥ 0. Inoltre $p_2(z-x) \neq 0$ solo se x è intero e $z - x \geq 0$ ovvero $x \leq z$. Scriviamo i al posto di ~~x~~ e k al posto di z

Distribuzione di Pascal

In un esperimento consistente di n prove indipendenti, calcoliamo la probabilità che il k-esimo successo si verifichi nella i-esima prova:

$$P(k\text{-mo successo avvenga l'}i\text{-esima volta}) =$$

$$= P(\{\text{nelle prime } i-1 \text{ volte si sono avuti } k-1 \text{ successi}\} \cap \{\text{nella } i\text{-esima prova si è avuto il successo}\})$$

$$\overset{(\text{indipendenza})}{=} \binom{i-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{i-1-k+1} \cdot p$$

(p = Prob. del successo in ogni singola prova)

$$= \boxed{\binom{i-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{i-k}}$$

(per $k=1$, ritorna la distrib. dell'istante del 1° successo)

ES: la prob. che un bimbo esposto ad una malattia contagiosa la contragga è p.

(i) se $p = \frac{1}{5}$, qual è la prob. che il dodicesimo bimbo esposto sia il terzo a contrarla?

(ii) in un campione di 5000 bambini, se $p = 0.001$, calcolare la prob. che il # bambini che contraggono la malattia sia ≤ 2.

Sol (i) $k=3$, $i=12$

$$P(\text{III successo alla } 12^{ma} \text{ volta}) = \binom{11}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^9 = 0.0591$$

(ii) $X \sim B(5000, 10^{-3})$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5000}{k} (10^{-3})^k (1-10^{-3})^{5000-k}$$

[con l'approx di Poisson ($\rightarrow$ poi) $\lambda \simeq np = 5$ e tale prob. viene $e^{-5}\left(1+5+\frac{25}{2}\right) = 18,5\, e^{-5} \simeq 0.124$

ESEMPIO 2 (SOMMA DI VARIABILI BINOMIALI)

$\longrightarrow$ pag 14

ESEMPIO 3

Due monete vengono lanciate più volte fino a che entrambe abbiano ottenuto almeno una volta Testa. Qual è la prob. che occorrano K lanci? $\max(S,T)=K$

Soluz.:

Se S e T sono i n. di lanci necessari perchè la 1ª e la 2ª moneta diano Testa, ~~allora~~ $S-1$ e $T-1$ sono v.a. con distrib. geometrica, indipendenti.

Occorre calcolare la densità discreta di $Z \doteq \max(S,T)$

Si ha $P(S=K)=p(1-p)^{K-1}$ e $P(T=h)=p(1-p)^{h-1}$.

$K=1,\ldots\;;\; h=1,\ldots$.

Inoltre $P(S\le K)=\sum_{i=1}^{K} P(S=i)=\sum_{i=1}^{K} p(1-p)^{i-1}$

$=p\sum_{j=0}^{K-1}(1-p)^j = p\,\cancel{\frac{(1-p)^K}{1-(1-p)}} \cancel{=(1-p)^K}$

$= p\,\dfrac{1-(1-p)^K}{1-(1-p)} = \underline{\underline{1-(1-p)^K \leftarrow \text{f.d.d. di } S}}$

Analogamente si trova la f.d.d. di T.

Allora: $P(Z\le K)=P(S\le K, T\le K)\overset{\text{indip}}{=}P(S\le K)\cdot P(T\le K)$

$=\left[1-(1-p)^K\right]^2$ e quindi

$P(Z=K)=P(Z\le K)-P(Z\le K-1)=\left[1-(1-p)^K\right]^2 +$
$-\left[1-(1-p)^{K-1}\right]^2=$

$=\left[1-(1-p)^K+1-(1-p)^{K-1}\right]\left[\cancel{1}-(1-p)^K\cancel{-1}+(1-p)^{K-1}\right]$

$=\left[2-(1-p)^{K-1}(1-p+1)\right]\left[(1-p)^{K-2}(\cancel{1}-\cancel{1}+p)\right]$

$=\left[2-(1-p)^{K-1}(2-p)\right]p(1-p)^{K-1} \longrightarrow$

Se avessimo voluto la ~~f.d.~~ legge di

$Y = \min(S, T)$:

$$P(Y \le K) = \cancel{P(} 1 - P(Y > K) = 1 - P(S > K) \cdot P(T > K)$$

$$= 1 - P(S \geq K+1) \cdot P(T \geq K+1) =$$

~~Infine:~~ ~~Dunque Y-1 è Geometrica di parametro~~

$$= 1 - \left[\cancel{1} - \cancel{1} + (1-p)^{K+1}\right]^2 = 1 - \left[(1-p)^2\right]^{K+1}$$

$\Rightarrow$ $Y - 1$ è Geometrica di parametro

$$p' = (1-p)^2$$

---

*

$$P(Y > K) = P(S > K)\, P(T > K) = (1-p)^K (1-q)^K$$

$$\Rightarrow P(Y \le K) = 1 - \left[(1-p)(1-q)\right]^K =$$

$1 - (1-\vartheta)^K$ che è la F.d.d. di una geom. modificata di par. $\vartheta = p + q - pq$.

Dunque $Y = \min(S, T)$ è un tempo di I successo con parametro $\vartheta = p + q - pq$

$$P(Y > K) = \left[(1-p)(1-q)\right]^K = (1-\vartheta)^K \text{ con } \vartheta = q + p - pq$$

$$\Rightarrow Y = \min(S, T) \sim \text{Geom}_{\text{mod}}(\vartheta).$$

Def

Se X e Y discrete con $p(x,y)$

Densità condiz. di X dato $Y=y$:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

se $p_Y(y)>0$ altrimenti $p_{X|Y}(x|y)=0$

Analog. si def. $p_{Y|X}(y|x)$

Si ha: $\sum_x p_{X|Y}(x|y) = \sum_x \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

$$= \frac{1}{p_Y(y)} \sum_x p(x,y) = \frac{p_Y(y)}{p_Y(y)} = 1$$

Allora $p_{X|Y}(x|y)$ ~~come variabile~~ ~~vista~~ come funzione di x è una densità.

Se X e Y sono indip. e $p_Y(y)>0 \Rightarrow$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_X(x)\,\cancel{p_Y(y)}}{\cancel{p_Y(y)}} = p_X(x)$$

Calcolo con densità

1) $X \sim Geom(p)$ $\quad F_X(k) = P(X \leq k) = p\sum_{i=0}^{k}(1-p)^i = \cancel{p}\,\frac{1-(1-p)^{k+1}}{\cancel{p}} = 1-(1-p)^{k+1}$

3) Distrib. di $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$

4) Esercizio 1.9, 1.55 ; 1.12

2) (vedi) da 1.20