Calcolo combinatorio

- Il # delle permutazioni di n elementi è:
  $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

Es. $X = \{a, b, c\}$

$\{a,b,c\}$ $\{a,c,b\}$ $\{b,a,c\}$, $\{b,c,a\}$

$\{c,a,b\}$ $\{c,b,a\}$ $3! = 6$

- Il # delle k-ple che si possono formare con n elementi è: n^k

Es. $X = \{1, 2, 3\}$ $n = 3$, $k = 2$

$\{1,1\}$ $\{2,2\}$ $\{3,3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$

$\{2,1\}$ $\{3,1\}$ $\{3,2\}$

- Il # delle disposizioni semplici di n elementi presi k a k è $D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Es $X = \{1, 2, 3\}$ (si prendono el. distinti)

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$, $\{2,1\}$ $\{3,1\}$ $\{3,2\}$

$D_{n,k} = 6 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{6}{1!}$

- Il # delle combinazioni di n elementi presi k a k è $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} D_{n,k}$

Es $X = \{1,2,3\}$ $n = 3$, $k = 2$ (non importa l'ordine $\{a,b\}$ e $\{b,a\}$ si contano una sola volta)

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$ $\{2,3\}$

$C_{n,k} = 3 = \dfrac{6}{2!}$

Esempio 1

Si gioca al lotto la cinquina secca (1, 2, 3, 4, 5) (i numeri debbono uscire nell'ordine) su una ruota. Qual è la prob. di vincere?

$$\Omega = \{ w = (w_1, w_2, \dots w_5) : w_i \neq w_j \quad i = 1 \dots 5, \; w_i \in \{1, \dots 90\}$$

Allora $\# \Omega = D_{90,5} = \frac{90!}{85!} = \frac{\cancel{85!} \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{\cancel{85!}}$

Se gli eventi elem. sono equiprobabili, la prob. cercata è $\frac{1}{\# \Omega} = \frac{1}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$.

Se avessimo giocato la cinquina semplice, con la quale si vince se i 5 numeri escono in un ordine qualunque, allora $\# \Omega' = C_{90,5} = \frac{1}{5!} D_{90,5}$ e la prob. cercata è $p = \frac{1}{\frac{1}{5!} D_{90,5}} = \frac{5!}{86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}$ > di quella precedente.

Esempio 2

Una moneta equilibrata viene lanciata n volte. Qual è la prob. che escano k volte testa e $(n-k)$ volte croce?

Questa volta non imponiamo che esca testa nei primi k lanci, ma ~~che~~ esca k volte testa, in tutto.

Le possibili scelte di ~~m~~ elementi presi k a k è $C_{n,k}$.

Dunque la prob. richiesta è:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Qui abbiamo indicato $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ con $\binom{n}{k}$

(Sviluppo del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad)$$

Gioco del Superenalotto.

Si giocano 6 numeri, trovare la probabilità di fare 6, o di fare 5.

Intanto, $\binom{90}{6} = \dfrac{85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90}{6!}$

$= \text{622'614'630}$

Allora

- Prob. di fare 6 $= \dfrac{1}{\text{622'614'630}} \cong 1.6 \cdot 10^{-9}$

Inoltre

$$\binom{89}{5} = \frac{85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89}{5!} = \text{41'507'642}$$

Quindi:

- Prob. di fare 5 $= \dfrac{1}{\binom{90}{6}} + \dfrac{1}{\binom{89}{5}}$

$$= \frac{1}{\text{622'614'630}} + \frac{1}{\text{41'507'642}} \simeq$$

$\simeq 2.57 \times 10^{-8} > 1.6 \times 10^{-9} =$ Prob. di fare 6

Esempio 3 (Problema dei compleanni)

Qual è la prob. che tra n persone scelte a caso almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno?

Siamo: $\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots 365\} \}$ $(n < 365)$

$A \subset \Omega = \{ \omega : \omega$ ha almeno due comp. uguali $\}$.

la prob. richiesta è $P(A)$.

$A^c = \{ \omega \in$ ω ha tutte le componenti diverse $\}$

$\# A^c = D_{365, n} = \dfrac{365!}{(365-n)!}$; $\# \Omega = 365^n$.

Allora $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)!} \cdot \dfrac{1}{(365)^n} =$

$= 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1) \cancel{(365-n)!}}{365 \quad 365 \quad\quad 365 \quad\quad 365 \; \cancel{(365-n)!}} =$

$= 1 - \dfrac{364}{365} \cdot \dfrac{363}{365} \cdots \dfrac{(365-n+1)}{365}$.

Se $n = 23$ $P(A) = 0.507 > \frac{1}{2}$

$n = 50$ $P(A) = 0.974$

Esempio 4 (LEGGE IPERGEOMETRICA)

Da un'urna contenente b palline bianche e r rosse se ne estraggono $n \le b+r$ senza reimbussolamento. Qual è la prob. che esattamente k di esse siano rosse?

Sia $\Omega = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots b+r\})$, cioè $\# \Omega = C_{b+r, n}$.

Se le palline sono numerate da 1 a $b+r$ e quelle rosse hanno numeri $\le r$, $A_k = \{ \omega \in \Omega : \omega = (\omega_1, \dots \omega_n)$ ha esattamente k ~~elementi~~ ~~con~~ elementi con indice $\le r \}$.

Si può mostrare che $\# A_k = C_{k,r} \cdot C_{n-k, b}$. Dunque:

$P(A_k) = \dfrac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}$; $p_k = P(A_k)$ è una prob. su $\{0, \dots n\}$ che si chiama *ipergeometrica*.

Schema successo-insuccesso

1) In una scatola vi sono b palline bianche e r palline rosse. Si fanno <u>n</u> estrazioni a caso, <u>con reinserimento</u>. (o con rimpiazzo).

Calcoliamo la probabilità di ottenere K palline rosse ($0 \le K \le n$).

Come nel caso di una moneta, per la quale la prob. di uscita di testa è p, in ogni estrazione, la prob. di estrarre una pallina rossa è costante, ed è uguale a $p = \frac{r}{b+r}$.

Dunque, la prob. cercata è:

$$P(\# \text{ rosse} = K) = \binom{n}{K}\left(\frac{r}{b+r}\right)^K \left(\frac{b}{b+r}\right)^{n-K},$$

$K = 0, 1, \dots, n.$

Si tratta di uno schema successo-insucc. in n prove ripetute, indipendenti, in cui la prob. del successo (uscita pallina rossa) è costante $\left(= p = \frac{r}{b+r}\right)$ — [schema BINOMIALE]

2) Ora, effettuiamo <u>n</u> estrazioni <u>senza rimpiazzo</u>, dalla stessa scatola.

Calcoliamo di nuovo la prob. di ottenere K palline rosse $(0 \leq K \leq n)$.

Questa volta, la prob. del successo (uscita della pallina rossa) <u>non</u> è costante, durante l'esperimento aleatorio; essa, infatti, dipende dalla composizione delle palline nella scatola, che cambia ad ogni estrazione successiva.

Risultato:

$$P(\# \text{ rosse} = K) = \frac{\binom{r}{K}\binom{b}{n-K}}{\binom{b+r}{n}}$$

[Schema IPERGEOMETRICO]

Esempio (Estrazioni senza rimpiazzo)

Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. ~~Vengono estratte 2 palline~~ Viene estratta 1 pallina e messa da parte senza guardarla; successivamente ne viene estratta un'altra. Qual è la probabilità che in queste due successive estrazioni si sia estratta 1 pallina bianca in totale?

$R_1 = \{$evento prima pallina estratta è rossa$\}$
$B_1 = \{$ " bianca $\}$
$R_2 = \{$ " seconda " " è rossa $\}$
$B_2 = \{$ " seconda " " è bianca $\}$

L'evento A di cui calcolare la probabilità è:

$$A = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2).$$

Si ha:
$$P(R_1 \cap B_2) = P(R_1)\,P(B_2 \mid R_1) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{b}{b+r-1}$$
$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2 \mid B_1) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r}{b+r-1}$$

Allora
$$P(A) = \frac{2br}{(b+r)(b+r-1)}$$

è un caso particolare della formula:

$$P(\#\text{ palline bianche} = k \text{ in } n \text{ estrazioni senza reimbussolamento}) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \qquad (*)$$

Infatti, per $n = 2$
$$P(\#\text{ palline bianche} = 1) = \frac{\binom{b}{1}\binom{r}{2-1}}{\binom{b+r}{2}} = \frac{b\,\frac{r!}{(r-1)!}}{\frac{(b+r)!}{2!\,(b+r-2)!}} = \frac{2br}{(b+r)(b+r-1)}$$

* Verifica che $(*)$ è vera, calcolando:
$$P(\text{si estraggono } 0 \text{ palline bianche}) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\,P(R_2 \mid R_1) = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r-1}{b+r-1}$$
$$P(\text{si estraggono } 2 \text{ palline bianche}) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\,P(B_2 \mid B_1) = \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b-1}{b+r-1}$$

25. Da un'urna contenente b palline bianche e r palline rosse ne viene estratta una che viene messa da parte senza guardarla. Qual è la prob. che la 2ª estratta sia bianca? (14 305)

Sol:

Sia $B_2 = \{ 2^a \text{ estratta bianca} \}$

$B_1 = \{ 1^a \text{ estratta bianca} \}$, $R_1 = \{ 1^a \text{ estratta rossa} \}$

Allora $B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap R_1) \Rightarrow$

$$P(B_2) = \underline{P(B_2 | B_1)}\, P(B_1) + P(B_2 | R_1)\, P(R_1)$$

Ma $P(B_1) = \frac{b}{b+r}$; $P(R_1) = \frac{r}{b+r}$

$P(B_2 | B_1) = \frac{b-1}{b+r-1}$; $P(B_2 | R_1) = \frac{b}{b+r-1}$

Quindi:

$$P(B_2) = \frac{b-1}{b+r-1} \cdot \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r-1} \frac{r}{b+r} =$$

$$= \frac{b}{\cancel{(b+r-1)}(b+r)} \left[\cancel{b-1+r} \right] = \frac{b}{b+r}$$

- B_1 e B_2 non sono indipendenti:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 | B_1)\, P(B_1) =$$

$$\frac{b-1}{b+r-1} \cdot \frac{b}{b+r} \neq \left(\frac{b}{b+r} \right)^2 = P(B_1)\, P(B_2)$$

Esempio (2)

Qual è la prob. di fare terno al lotto, giocando i numeri 3, 13 e 87 su una singola ruota?

Le 90 palline nell'urna del lotto si possono dividere in due gruppi: il I costituito dalle palline 3, 13, 87 ($\equiv$ palline bianche), il II da tutte le altre ($\equiv$ palline rosse). La prob. di fare terno è la prob. che in 5 estrazioni senza rimpiazzo si ottengano 3 palline del I gruppo e 2 del secondo. Dunque, tale prob. è:

$$\frac{\binom{3}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748} = 0.000085$$

Prob. di fare ambo:

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\cancel{88!}}{\cancel{3!}\,\cancel{85!}} \cdot \frac{\overset{\overset{2}{\cancel{4\cdot 5}}}{\cancel{5!}}\,\cancel{85!}}{\underset{89\cdot\underset{\cancel{18}\,9}{\cancel{90}}}{\cancel{90!}}} = \frac{2}{9\cdot 89} \simeq 0.0025$$

Prob. che il n. 1 esca in una singola estrazione

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$ EXERC.

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{k\,n! + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(\cancel{k}+n-\cancel{k}+1)}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$