

Probabilità condizionale, indipendenza

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sp. di probabilità.

Def: $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$.

Si chiama probabilità condizionale di A rispetto a B il numero:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La prob. condiz. è la prob. che A si verifichi, sapendo che B si è verificato.

Se, ed es, $B \subset A$ allora $P(A \cap B) = P(B)$ e

$P(A|B) = 1$ il che è logico giacché se $B \subset A$ vuol dire che $B \Rightarrow A$, ovvero se B si è verificato, certamente (con prob. 1) si verifica A.

Risulta $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, che vale

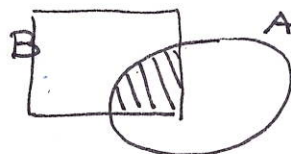
Esempio 1 (anche se $P(B) = 0$).

Si gioca alla roulette i numeri 3, 13, 22. I possibili risultati sono 37 (i numeri da 0 a 36).

Consideriamo la distrib. uniforme (equiprobabilità sulle spin degli eventi). La probabilità di vincere è $\frac{3}{37}$.

Supponiamo di sapere che il gioco è truccato in modo da far uscire un n° dispari (evento B). Qual è la prob. di vincere?

Se $A = \{3, 13, 22\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 35\}$



Il numero di casi favorevoli è 2 (3, 13 dispari, mentre 22 è pari); il n° dei casi possibili è 18.

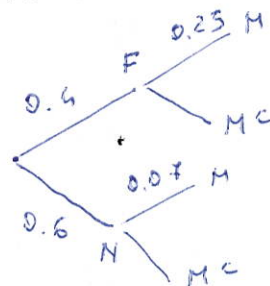
$$\text{Dunque } P(A|B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{3, 13\})}{P(B)} =$$

$$= \frac{2}{37} / \frac{18}{37} = \frac{2}{18}.$$

Esempio 2

Una popolazione si compone per il 40% di fumatori (F) e per il 60% di non fumatori (N). Si sa che il 25% dei fumatori e il 7% dei non fumatori sono affetti da una certa malattia respiratoria cronica (M). Qual è la prob. che un individuo scelto a caso sia affetto dalla malattia?

Si ha: $P(F) = 0.4$; $P(N) = 0.6$
 $P(M|F) = 0.25$; $P(M|N) = 0.07$



Quindi: (FORMULA PROB. TOTALI)

$$P(M) = P(M \cap F) + P(M \cap N) = P(M|F) \cdot P(F) + P(M|N) \cdot P(N)$$

$$= 0.25 \cdot 0.4 + 0.07 \cdot 0.6 = \frac{25}{100} \cdot \frac{4}{10} + \frac{7}{100} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10} + \frac{42}{1000}$$

$$= 0.142.$$

FORMULA DI BAYES

Siano $A_1, \dots, A_n$ eventi disgiunti ed esaustivi
 $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \Omega$. Allora:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$

Infatti:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) P(B|A_i) \text{ e inoltre}$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \text{ unioni disgiunte} \Rightarrow$$

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)$$

La formula di Bayes esprime $P(A_i|B)$ in funzione di $P(B|A_i)$

ESERCIZIO: $P(A \cap B \cap C) = P(C) \cdot P(B|C) \cdot P(A|B \cap C)$

Esempio 3

Con riferimento all'esempio 2, qual è la probabilità che una persona affetta dalla malattia respiratoria sia un fumatore? Per la f. di Bayes applicata alla partizione $\Omega = F \cup N$ si ha:

$$P(F|M) = \frac{P(F)P(M|F)}{P(M)} = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.142} = 0.704$$

Esempio 4 (Es. 1.7)

Due giocatori di tiro al bersaglio sparano allo stesso bersaglio. Si sa che il primo tiratore colpisce ~~in media~~ ^{in media} 9 colpi durante lo stesso tempo in cui il secondo giocatore ne spara 10. La precisione dei due tiratori non è la stessa: su 10 colpi sparati dal tiratore 1, 8 colpiscono il bersaglio, dal tiratore 2 solo 7.

Durante il gioco, il bersaglio è stato colpito da un colpo, ma non si sa quale tiratore lo abbia sparato. Qual è la probabilità che il bersaglio sia stato sparato dal giocatore n° 2?

Sia A_1 = evento che un colpo è sparato dal giocatore 1
 A_2 = " " " " 2

Possiamo supporre, tenendo conto dei dati, che

$P(A_1) = \frac{9}{10} P(A_2)$. Sia B = evento che il bersaglio sia stato colpito.

Abbiamo anche $P(B|A_1) = 0.8$; $P(B|A_2) = 0.7$

Dalla formula di Bayes:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{0.7 \cdot P(A_2)}{0.9 \cdot P(A_2) \cdot 0.8 + 0.7 \cdot P(A_2)}$$

$$= 0.493$$

N.B. $P(A_2)$ è incognito, ma il problema si può risolvere ugualmente.

OSS: $P(A_1|B) + P(A_2|B) = 1$..

INDIPENDENZA STOCASTICA

Def: $A, B \in \mathcal{A}$ sono indipendenti se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si dice, inoltre, che $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sono a due a due indep. se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j.$$

$A_1, \dots, A_n$ sono una famiglia di eventi indep. se
 $\forall k \leq n$, in ogni scelta di indici $i_1, \dots, i_k$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Es: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ con la distrib. uniforme:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

$$A_1 = \{1, 4\} \quad A_2 = \{2, 4\} \quad A_3 = \{3, 4\}$$

Risulta: A_1, A_2, A_3 sono indep. a due a due, ma:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Se A e B sono indipendenti, dalle def. segue:

$$P(A|B) = P(A) \quad (P(B) > 0)$$

D'altra parte: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$

Dunque A, B indep $\Rightarrow$
$$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{cases}$$

Orvero; sapere se $B^{(A)}$ è verificato o meno non aggiunge alcuna informazione sulla probabilità che si verifichi A (B).

$$A, B \text{ indep} \Rightarrow A^c, B^c \text{ indep}; A, B^c \text{ indep}; A^c, B \text{ indep}.$$

Esempio (Lancio di una moneta)

Il lancio di una moneta dà testa con prob. p , $0 \leq p \leq 1$ e croce con prob. $1-p$. La moneta viene lanciata n volte. Qual è la prob. di ottenere K teste nei primi K lanci (e croce negli altri $n-K$)?

Possiamo supporre che i lanci siano indipendenti l'uno dall'altro. Sia $\Omega = \{\omega = (w_1, \dots, w_n), w_i = 0, \text{ oppure } 1\}$ (1 se viene testa, 0 croce). Se $p = \frac{1}{2}$, allora

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\#\Omega}. \quad \text{Se } p \neq \frac{1}{2}, \text{ possiamo}$$

per $i=1, \dots, n$: $A_i = \{\omega \mid w_i = 1\}$ (evento che il lancio i -esimo dia ^{testa} croce); dunque $P(A_i) = p$.

Se A = evento di cui ciascuno dei prob. risulta

$$A = A_1 \cap \dots \cap A_K \cap A_{K+1}^c \cap \dots \cap A_n^c$$

~~oppure una giunzione, di cui bisogna che ottenga risultato~~

Allora, per l'indip. degli eventi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \dots P(A_K) \cdot P(A_{K+1}^c) \dots P(A_n^c) = \\ &= \underbrace{p \cdot p \dots p}_{K \text{ volte}} \cdot \underbrace{(1-p) \dots (1-p)}_{n-K \text{ volte}} \\ &= p^K (1-p)^{n-K} \end{aligned}$$

~~La situazione dell'esempio si riferisce ad uno schema~~

~~successo-fallimento (Testa-croce) o schema di Bernoulli.~~

+ Esempio 2 estr. senza rimpiazzo
 B_1, B_2 dipendenti

ESERCIZIO 1

$$P(A \cap B | C) = P(A | C) \cdot P(B | A \cap C)$$

Infatti:

$$(1) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$(2) = \frac{P(\cancel{A \cap C})}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap \cancel{A \cap C})}{P(\cancel{A \cap C})} = \frac{P(B \cap A \cap C)}{P(C)}$$

ESERCIZIO 2

$$P(A \cap B \cap C) = P(A | \{B \cap C\}) \cdot P(B | C) \cdot P(C)$$

Infatti:

$$\overset{(2)}{P(\cancel{A \cap B \cap C})} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(\cancel{B \cap C})} \cdot \frac{P(\cancel{B \cap C})}{P(C)} = (1)$$

Esempio

Un certo Test del sangue è efficace al 99% nell'individuare una certa malattia. Si possono verificare più dei "falsi positivi" con probabilità μ (ovvero una persona sana che si sottopone al test, con prob μ risulta erroneamente malata).

Se l'incidenza della malattia sulla popolazione è dello 0.5%, qual è la prob. che un soggetto sia malato, condizionale al fatto che il Test sia positivo?

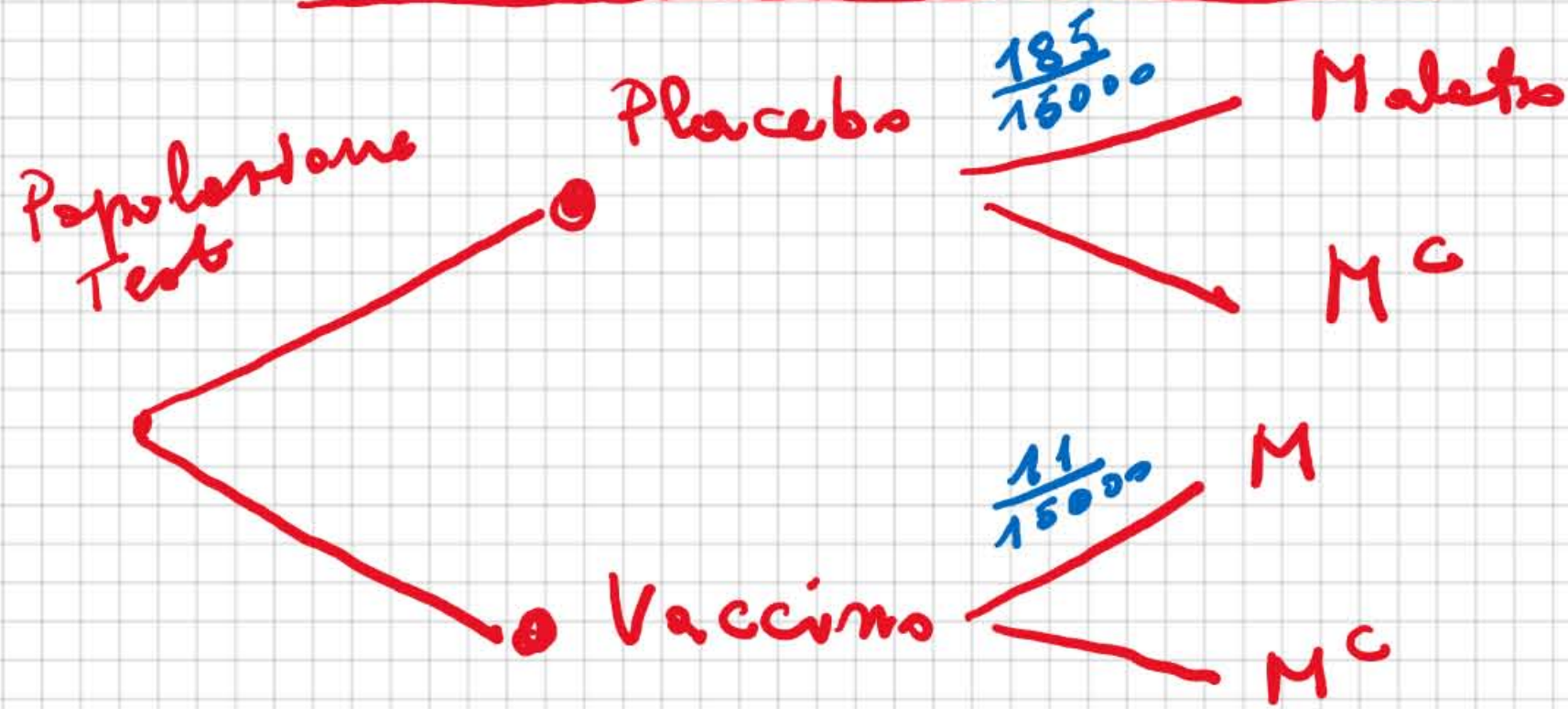
$M = \{\text{subjecto } \bar{\text{malato}}\}$, $E = \{\text{il Test è positivo}\}$
Bayes

$$P(M|E) = \frac{P(E|M)P(M)}{P(E|M)P(M) + P(E|M^c)P(M^c)}$$

$$\frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + \mu \cdot 0.995} \quad \hat{=}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \mu &= 0.001 \Rightarrow P(M|E) = 0.8326 \\ &= 0.9802 \\ \mu &= 0.0001 \Rightarrow &= 0.4987 \\ \mu &= 0.005 \Rightarrow &= 0.3322 \\ \bullet \mu &= 0.01 \Rightarrow \end{aligned}$$

VACCINO MODERNA



Popolazione = Placebo $\cup$ Vaccinati = 15000×2

$$\begin{aligned}
 \text{EFFICACIA} &= \frac{P(M|PE) \cdot P(PE) - P(M|V) P(V)}{P(M|PE) \cdot P(PE)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} [P(M|PE) - P(M|V)]}{\frac{1}{2} P(M|PE)} \\
 &= \left(\frac{185}{15000} - \frac{11}{15000} \right) / \frac{185}{15000} = \frac{174}{185} \approx 0.94
 \end{aligned}$$

VACCINO BIONTECH - PFIZER

$$\text{Campione} = 21720 + 21728 (\text{Vacc.} + \text{placebo})$$

$$P(M|P) = \frac{162}{21728} ; P(M|V) = \frac{8}{21720}$$

$$\text{EFFICACIA} = \frac{\frac{162}{21728} - \frac{8}{21720}}{\frac{162}{21728}} \approx \underline{\underline{0.95}}$$

