f(x,y) = exp(-y)* 1_E (x,y)
E= { (x,y): 0<x<y }

▷ **Esercizio 2b.14** Sia (X, Y) un vettore aleatorio di densità congiunta $f(x, y) = e^{-y}$ per $0 < x < y$. Trovare la densità di X, di Y e di (X, Z), dove $Z = Y - X$.

▷ **Esercizio 2b.15** Siano X e Y indipendenti e uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Trovare la densità di $Z = \frac{\max(X,Y)}{\min(X,Y)}$.

▷ **Esercizio 2b.17** Siano X, Y e Z indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Trovare la densità di $Z - X$ condizionata da $X < Z < Y$.

▷ **Esercizio 2b.18** (II prova in itinere a.a. 2011-12)
Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità di X e Y. Risultano v.a. indipendenti?
(ii) Calcolare $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$ e $Cov(X, Y)$.
(iii) Calcolare $P(Y - 4X^2 > 0)$.
(iv) Trovare la densità di $Z = X + Y$ e calcolare:
  (a) $P(\ln(X + Y) < 0)$;
  (b) il quantile di Z di ordine $1/3$, cioé il valore q per cui $P(Z \leq q) = 1/3$.

SOLUZIONI Esercizi 2b.14, 2b.15, 2b.17, 2b.18

▷ **Esercizio 2b.14**

Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \Big[-e^{-y} \Big]_x^{+\infty} = e^{-x}, \text{ se } x > 0.$$

Dunque X~esp(1)

Inoltre Y~Gamma (2, 1)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) =$$

$$= \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y}, \text{ se } y > 0.$$

Inoltre, se $Z = Y - X$, risulta quasi certamente $Z \geq 0$ e, per $z \geq 0$:

$$P(Z \leq z) = P(Y - X \leq z) = \int \int_E e^{-y} \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}(x,y) dx dy,$$

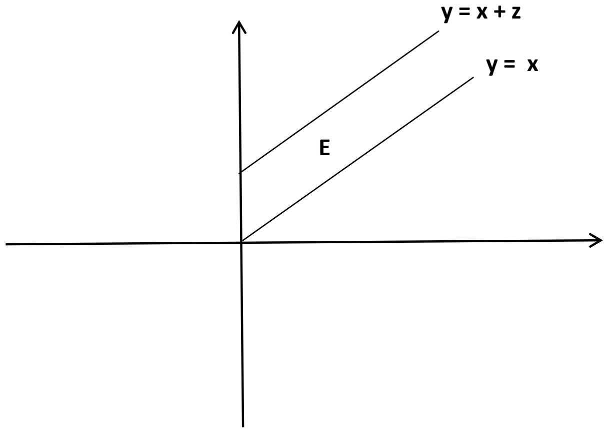

Figura 9

dove $E = \{(x, y) : 0 < x < y, y \leq x + z\}$ è l'insieme indicato in figura 9.

Allora, per $z \geq 0$:

$$P(Z \leq z) = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{x+z} dy e^{-y} = \int_0^{+\infty} dx \Big[-e^{-y} \Big]_x^{x+z} = \ldots = 1 - e^{-z}$$

e quindi Z ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$.
Consideriamo ora la trasformazione $g : (X, Y) \longrightarrow (X, Z)$

la densita' di Y - X e':
f_Z(z) = \int f(x, z +x) dx

$$\begin{cases} X = X \\ Z = Y - X \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} X = X \\ Y = X + Z \end{cases}$$

con

$$J_{g^{-1}}(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ det J_{g^{-1}}(x, z) = 1.$$

Allora, la densità di (X, Z) è :

$$f_{(X,Z)}(x, z) = f(x, x+z) \cdot 1 = e^{-(x+z)} \mathbf{1}_{\{0<x<x+z\}}(x, z) = e^{-(x+z)}, \text{ per } x, z > 0.$$

▷ **Esercizio 2b.15**

Siano Xe Y v.a. indipendenti ed uniformemente distribuite in $(0, 1)$. Ci proponiamo di calcolare la densità di $Z = \frac{\max(X,Y)}{\min(X,Y)}$.

Con riferimento alla figura 10, risulta $Z = X/Y$ su $E_1 = \{(x, y) : y \leq x\}$, mentre $Z = Y/X$ su $E_2 = \{(x, y) : y \geq x\}$.

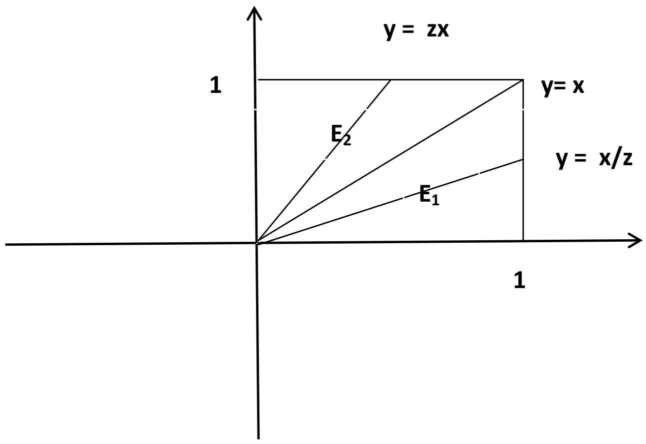

Figura 10

Ovviamente risulta $Z \geq 1$. Se $z \geq 1$, si ha:

$$P(Z \leq z) = \int\int_{E_1 \cap \{x \leq zy\}} dxdy + \int\int_{E_2 \cap \{y \leq zx\}} dxdy =$$

$$\int_0^1 dx \int_{x/z}^x dy + \int_0^1 dy \int_{y/z}^y dx = \int_0^1 dx(x - x/z) + \int_0^1 dy(y - y/z) =$$

$$= (1 - 1/z) \int_0^1 xdx + (1 - 1/z) \int_0^1 ydy = (1 - 1/z), \ z \geq 1.$$

Allora, La densità di Z è $f_Z(z) = \frac{d}{dz} P(Z \leq z) = \frac{1}{z^2}$, per $z \geq 1$, altrimenti è zero.

▷ **Esercizio 2b.17**
Siano X, Y e Z indipendenti ed esponenziali di parametro λ, e poniamo $U = Z - X$; occorre calcolare $P(U \leq u | X < Z < Y) =$

$$= P(U \leq u | 0 < U < Y - X) = P(U \leq u | 0 < U < V) = \frac{P(U \leq u, 0 < U < V)}{P(0 < U < V)}$$

dove abbiamo posto $V = Y - X$.
Cominciamo col calcolare la densità congiunta di (U, V); si ha:

$$P(U \leq u, V \leq v) = P(Z - X \leq u, Y - X \leq v) =$$

$$= P(Y \leq v + X, Z \leq u + X, X \geq 0) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{v+x} dy \int_0^{u+x} dz \lambda^3 e^{-\lambda(x+y+z)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{v+x} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_0^{u+x} \lambda e^{-\lambda z} dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{v+x} \lambda e^{-\lambda y} dy \left(1 - e^{-\lambda(u+x)}\right)$$

$$= \ldots = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda u} + \frac{1}{3} e^{-\lambda(u+v)} := F(u, v).$$

Quindi, la densità di (U, V) è data da:

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{1}{3} \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}, \ u, v \in \mathbb{R}.$$

Allora:

$$P(U \leq u, 0 < U < V) = \int_0^u ds \int_u^v dt \frac{1}{3} \lambda^2 e^{-\lambda(s+t)} = \ldots = \frac{1}{6}(1 - e^{-2\lambda u}).$$

Inoltre:

$$P(0 < U < V) = \int_0^{+\infty} ds \int_u^{+\infty} dt \frac{1}{3} \lambda^2 e^{-\lambda(s+t)} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \int_u^{+\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda u} du = \ldots = \frac{1}{6}$$

Infine:

$$\frac{P(U \leq u, 0 < U < V)}{P(0 < U < V)} = \frac{\frac{1}{6}(1 - e^{-2\lambda u})}{\frac{1}{6}} = 1 - e^{-2\lambda u}, \text{ per } u > 0.$$

▷ **Esercizio 2b.18**
(i) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{(0,1)^2}(x,y) \cdot (x+y)dy$$

Dunque, per $x \notin (0,1)$ risulta $f_X(x) = 0$, mentre per $x \in (0,1)$ si ottiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dx & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto, X e Y hanno stessa legge, ma non sono indipendenti, in quanto $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.
(ii)

$$E(X) = E(Y) = \int_0^1 t(t + \frac{1}{2})dt = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \int_0^1 t^2(t + \frac{1}{2})dt = \frac{5}{12}$$

da cui $Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$;

$$E(XY) = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)dy = \int_0^1 xdx \int_0^1 (yx + y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 xdx \Big[xy^2/2 + y^3/3\Big]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \int_0^1 dx(x^2/2 + x/3) = \frac{1}{3} \ .$$

Infine $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}$.

(iii) Si ha:

$$P(Y > 4X^2) = \int\int_F (x+y)dx\ dy$$

dove F è l'insieme indicato in Figura 11.
Esplicitando il calcolo, si ottiene:

$$P(Y > 4X^2) = \int_0^{1/2} dx \int_{4x^2}^1 (x+y)dy = \int_0^{1/2} dx \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_{y=4x^2}^{y=1} =$$

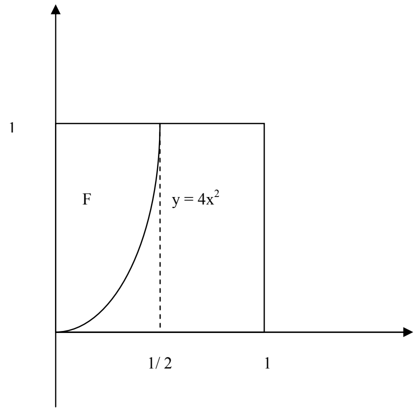

Figura 11

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x - 4x^3 - 8x^4 \right) dx = \ldots = \frac{21}{80}$$

(iv) Per $z \in (0, 2)$, la densità di $Z = X + Y$ è data dalla formula:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,1)}(z - x) \cdot (x + z - x)\ dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{(z-1,z)}(x) \cdot z\ dx$$

Pertanto:

se $z \in (0, 1)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_0^z z dx = z^2$$

se $z \in (1, 2)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 z dx = z(2 - z)$$

In conclusione:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq 0 \\ z^2 & \text{se } z \in (0,1) \\ z(2-z) & \text{se } z \in (1,2) \\ 0 & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

(a) $P(\ln(X+Y)<0) = P(Z \in (0,1)) = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}$.
(b) Il quantile di Z di ordine $\alpha = \frac{1}{3}$ è $q_\alpha = 1$; infatti $P(Z \leq 1) = \frac{1}{3}$.