Esercizi e calcoli con densità continue

Svolgiamo gli esercizi 2.1, 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10, 2.11, 2.29, 2.40, 2.41, 2.45, 2.57

▷ **Esercizio 2.1**
Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ a & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

Trovare $a \in \mathbf{R}$ in modo che f sia la densità di una variabile aleatoria continua X. Trovare inoltre la funzione di distribuzione di X.

Soluzione. Si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4x^2}dx + \int_{-1}^{1} adx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{4x^2}dx =$$

$$\left[-\frac{1}{4x}\right]_{-\infty}^{-1} + 2a + \left[-\frac{1}{4x}\right]_{1}^{+\infty} = \frac{1}{4} + 2a + \frac{1}{4} = 2a + \frac{1}{2} \ .$$

Affinché f sia una densità, deve essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Dunque, deve aversi: $2a + \frac{1}{2} = 1$, da cui si ricava $a = \frac{1}{4}$.
La funzione di distribuzione di X è data da:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Se $x < -1$, si ha:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4t^2}dt = \left[-\frac{1}{4t}\right]_{-\infty}^{x} = -\frac{1}{4x} \ .$$

Se $-1 \leq x \leq 1$, si ha:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4t^2}dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4} + \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{4} \ .$$

Se $x > 1$, si ha:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{4t^2}dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{4t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{4t} \right]_1^x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} = 1 - \frac{1}{4x} \; .$$

Riepilogando:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x} & \text{se } x < -1 \\ \\ \frac{x+2}{4} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 1 - \frac{1}{4x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

▷ **Esercizio 2.2**

Sia X una v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$ e sia $Y = X + 1$. Trovare la densità e la funzione di distribuzione della v.a. Y.

Soluzione. Ricordando che la funzione di distribuzione di una v.a. X uniformemente distribuita in $[0, 1]$ è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} \; ,$$

si ottiene la funzione di distribuzione di Y :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X + 1 \leq y) = P(X \leq y - 1) = F_X(y - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } y < 1 \\ y - 1 & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{se } y > 2 \end{cases} \; .$$

Derivando, si trova la densità di Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \; .$$

Questo risultato non è inaspettato: se X è uniformemente distribuita in $[0, 1]$, la v.a. $Y = X + 1$ sarà uniformemente distribuita in $[1, 2]$.

▷ **Esercizio 2.3**

Sia X una v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 1]$. Posto $Y = [5X]+1$, calcolare la legge di Y ($[\ ]$ denota la parte intera).

Soluzione. La v.a. Y è intera ed assume valori in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Come è facile verificare, si ha:

$$P(Y = 1) = P\left(0 \leq X < \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$P(Y = 2) = P\left(\frac{1}{5} \leq X < \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$P(Y=3) = P\left(\frac{2}{5} \leq X < \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$P(Y=4) = P\left(\frac{3}{5} \leq X < \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$P(Y=5) = P\left(\frac{4}{5} \leq X < 1\right) = \frac{1}{5};$$

Pertanto Y è uniformemente distribuita sull' insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

▷ **Esercizio 2.6**
Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda = 7$. Trovare la densità e la funzione di distribuzione di $Y = -5X + \frac{\pi}{2}$.

Soluzione. La densità di X è:

$$f_X(x) = 7e^{-7x} \cdot \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

e la sua funzione di distribuzione è:

$$F_X(x) = (1 - e^{-7x}) \cdot \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \ .$$

Pertanto:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-5X + \frac{\pi}{2} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{\frac{\pi}{2} - y}{5}\right) =$$

$$= 1 - P\left(X < \frac{\frac{\pi}{2} - y}{5}\right) = \exp\left[-\frac{7}{5}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, \frac{\pi}{2})}(y) \ .$$

Derivando, si ottiene che la densità di Y è:

$$f_Y(y) = \frac{7}{5} \exp\left[-\frac{7}{5}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, \frac{\pi}{2})}(y) \ .$$

▷ **Esercizio 2.7**
Siano X e Y indipendenti ed uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Trovare la densità di $Z = X + Y$. Inoltre calcolare $E(Z)$ e $Var(Z)$.

Soluzione. Denotiamo con f_X e f_Y le densità di X e Y, rispettivamente. Essendo X e Y indipendenti, per la formula della convoluzione la densità di $Z = X + Y$ è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

In particolare, si ha:

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y) \; .$$

Dunque:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(z-x)dx =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{1}_{[z-1,z]}(x)dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0 \\ z & \text{se } 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & \text{se } 1 < z < 2 \\ 0 & \text{se } z \geq 2 \end{cases}$$

Otteniamo pertanto la cosiddetta densità “a triangolo”, nulla al di fuori dell’ intervallo $[0,2]$ e che ha per grafico un triangolo isoscele di altezza 1. Si ha poi:

$$E(Z) = E(X+Y) = \int_0^2 z f_Z(z)dz = \int_0^1 z^2 dz + \int_1^2 z(2-z)dz =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \ldots = 1 = E(X) + E(Y),$$

come doveva essere. Inoltre, essendo X e Y indipendenti:

$$Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \; .$$

▷ **Esercizio 2.9**

Supponiamo che la votazione in trentesimi, ottenuta da un certo gruppo di studenti nella prova scritta di Fondamenti di Informatica, si possa modellizzare mediante una v.a. con distribuzione normale di media 22 e varianza 9.
(i) Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto non inferiore a 24?
(ii) Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto inferiore a 18?
(iii) Qual è la percentuale di studenti che hanno ottenuto un voto compreso tra 19 e 21?

Soluzione. (i) Sia $X \sim \mathcal{N}(22, 9)$; allora;

$$P(X \geq 24) = 1 - P(X < 24) = 1 - P(X \leq 24) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-22}{3} \leq \frac{24-22}{3} \right) = 1 - P\left(Y \leq \frac{2}{3} \right) =$$

$$1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \cong 1 - \Phi(0.66),$$

ove abbiamo indicato con $\Phi(y)$ la funzione di distribuzione della v.a. Gaussiana standardardizzata $Y = \frac{X-22}{3}$. Dalla tavola della distribuzione normale standard si ricava $\Phi(0.66) \cong 0.7454$, da cui $P(X \geq 24) \cong 0.2546$.
(ii)

$$P(X < 18) = P\left(Y \leq \frac{18-22}{3}\right) = \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \cong 1 - \Phi(1.33).$$

Sempre usando la tavola, si ottiene $\Phi(1.33) = 0.9082$ e quindi $P(X < 18) = 1 - 0.9082 = 0.0918$.
(iii)

$$P(19 \leq X \leq 21) = P\left(\frac{19-22}{3} \leq Y \leq \frac{21-22}{3}\right) =$$

$$= P\left(-1 \leq Y \leq -\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{3} \leq Y \leq 1\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \cong$$

$$\cong 0.8413 - 0.6293 = 0.212 \ .$$

▷ **Esercizio 2.10**
Sia X una v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 5]$. Trovare la legge di $Y = [X]$, dove $[x]$ denota la parte intera di x.

Soluzione. La densità di X è $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \mathbf{1}_{[0,5]}(x)$.
La v.a. Y assume i valori interi dell'intervallo $[0, 5]$ e si ha :

$$P(Y = 0) = P(X \in [0, 1)) = \frac{1}{5} \ ,$$

$$P(Y = 1) = P(X \in [1, 2)) = \frac{1}{5} \ ,$$

$$P(Y = 2) = P(X \in [2, 3)) = \frac{1}{5} \ ,$$

$$P(Y = 3) = P(X \in [3, 4)) = \frac{1}{5} \ ,$$

$$P(Y = 4) = P(X \in [4, 5)) = \frac{1}{5} \ ,$$

$$P(Y = 5) = P(X = 5) = 0 \ .$$

Quindi Y è uniformemente distribuita sull'insieme $\{0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4\}$.

▷ **Esercizio 2.11**
Sia X una v.a. uniformemente distribuita nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(i) Calcolare la legge di $Y = \tan(X)$ (la densità di Y è detta di *Cauchy*)
(ii) Quanto vale $E(Y)$?

Soluzione. (i) La densità di X è:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbf{1}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}(x) \ ;$$

dunque, per $y \in (-\infty, +\infty)$:

$$P(Y \leq y) = P(\tan X \leq y) = P(X \leq \arctan y).$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = f_X(\arctan y) \cdot (\arctan)'(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \ .$$

Essa è detta densità di Cauchy.
(ii) L'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)} = 2\int_0^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

è ovviamente divergente, essendo la funzione integranda infinitesima di ordine 1, per $y \to +\infty$. Quindi, non esiste $E(Y)$; questo è un semplice esempio di v.a. provvista di densità, ma che non ha valor medio. Naturalmente, non esistono nemmeno i momenti di Y di ordine superiore a 1, mentre esistono i momenti $E(Y^\alpha)$ con $\alpha < 1$, come è facile verificare, controllando la convergenza del relativo integrale improprio.

▷ **Esercizio 2.29** (prova d'esame del 9/07/2001)
Un componente elettronico è formato da due elementi in serie (funziona solo se funzionano entrambi), A e B, ciascuno dei quali ha un tempo di vita esponenziale di parametri $\lambda = 3$ e $\mu = 1$, rispettivamente.
(i) Indichiamo con T la v.a. *tempo di vita* del componente. Qual è la densità di T? Quanto vale il tempo medio di vita del componente?
(ii) Per aumentare l'affidabilità e ridurre gli interventi di sostituzione, viene aggiunto un elemento identico ad A in parallelo con A (in questo caso l'elemento funziona se almeno uno dei due funziona). Qual è la densità del tempo di vita del nuovo complesso? quanto vale ora il tempo di vita medio? E se invece avessimo messo un elemento identico a B in parallelo con B? Quale delle due soluzioni è migliore?

Soluzione. (i) Indichiamo con T_A e T_B i tempi di vita degli elementi A e B; essi hanno densità esponenziale di parametri $\lambda = 3$ e $\mu = 1$, rispettivamente; possiamo ragionevolmente supporre che T_A e T_B siano v.a. indipendenti. Allora il tempo di vita T del componente è uguale al minimo tra T_A e T_B. Si ha:

$$P(T > t) = P(\min(T_A, T_B) > t) = P(T_A > t, T_B > t) \ ,$$

per l'indipendenza di T_A e T_B. Ricordando che la funzione di distribuzione di una v.a. esponenziale X di parametro γ è $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\gamma x}$, per $x \geq 0$, mentre è zero per $x < 0$, si ottiene infine:

$$P(T > t) = e^{-\lambda t} e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t} \ , t > 0.$$

Quindi $P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$, ovvero T ha densità esponenziale di parametro $\lambda + \mu$. Siccome la media di una v.a. esponenziale di parametro γ è γ^{-1}, si ha:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{4} \ .$$

(ii) Se aggiungiamo un elemento uguale ad A, connesso in parallelo con A stesso, ora A risulta essere un sistema formato da due elementi, con tempi di vita che indichiamo con T_A^1 e T_A^2. Ovviamente risulta ora che il tempo di vita di A è:

$$T_A = \max(T_A^1, T_A^2),$$

mentre il tempo di vita del componente B è sempre esponenziale di parametro μ. Per calcolare la densità di T_A procediamo cosi̇̀:

$$F_{T_A}(t) = P(T_A \leq t) = P(\max(T_A^1, T_A^2) \leq t) = P(T_A^1 \leq t, T_A^2 \leq t) =$$

$$= P(T_A^1 \leq t)P(T_A^2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

Quindi la densità di T_A si ottiene derivando l'espressione precedente:

$$f_{T_A}(t) = 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \ .$$

Passiamo ora a calcolare la funzione di sopravvivenza di T, che è sempre il minimo tra T_A e T_B; si ha:

$$P(T > t) = P(\min(T_A, T_B) > t) = P(T_A > t, T_B > t) =$$

$$= P(T_A > t)P(T_B > t) = (1 - (1 - e^{-\lambda t})^2)e^{-\mu t} = 2e^{-(\lambda+\mu)t} - e^{-(2\lambda+\mu)t}.$$

Dunque:

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - (2e^{-(\lambda+\mu)t} - e^{-(2\lambda+\mu)t})$$

e derivando, si ottiene che la densità di T è, per $t \geq 0$:

$$f_T(t) = 2(\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)t} - (2\lambda + \mu)e^{-(2\lambda+\mu)t}.$$

Pertanto:

$$E(T) = \int_0^\infty t[2(\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)t} - (2\lambda + \mu)e^{-(2\lambda+\mu)t}]dt =$$

$$= \frac{2}{\lambda + \mu} - \frac{1}{2\lambda + \mu} = \frac{5}{14} \ .$$

(ii) Se avessimo raddoppiato l'elemento B, avremmo ottenuto una situazione analoga a quella appena trattata, però con λ al posto di μ. In tal caso la vita media T del componente sarebbe stata:

$$E(T) = \frac{2}{\mu + \lambda} - \frac{1}{\lambda + 2\mu} = \frac{3}{10} \ .$$

Da ciò segue che la prima soluzione è migliore della seconda, giacché $\frac{5}{14} > \frac{3}{10}$.

▷ **Esercizio 2.40** (prova d'esame del 12/09/2003)
Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0,1]$ e
$Y = \tan(\pi X/2)$.
(i) Calcolare la densità di Y.
(ii)Calcolare $P(0 \le Y < 1)$.
(iii) Esiste $E(Y)$?

Soluzione. (i) Calcoliamo dapprima la funzione di ripartizione $F_Y(t)$ di Y. A tale proposito osserviamo che la funzione $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ è crescente per $x \in [0,1]$ e che $f([0,1]) = [0,+\infty)$. Pertanto, detta $F_X(t)$ la funzione di ripartizione di X, per $t \ge 0$ si ha:

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P\left(\tan\left(\frac{\pi X}{2}\right) \le t\right) = P\left(\frac{\pi X}{2} \le \arctan t\right) =$$

$$= P\left(X \le \frac{2}{\pi}\arctan t\right) = F_X\left(\frac{2}{\pi}\arctan t\right) = \frac{2}{\pi}\arctan t,$$

mentre, se $t < 0$ è $F_Y(t) = 0$, poiché $\frac{2}{\pi}\arctan t < 0$ e $F_X(s) = 0,\ s < 0$. Dunque:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan(t) & \text{se } t \ge 0 \end{cases} .$$

Di conseguenza la densità $f_Y(t)$ di Y è:

$$f_Y(t) = \frac{dF_Y(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{se } t \ge 0 \end{cases} .$$

(ii) Si ha:

$$P(0 \le Y < 1) = F_Y(1) - F_Y(0) = \frac{2}{\pi}\arctan(1) - \frac{2}{\pi}\arctan(0) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} .$$

(iii) $E(Y)$ non esiste. Infatti:

$$E(|Y|) = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)} dt .$$

Posto $x = t^2$ l'integrale di sopra diventa:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x)} dx = \frac{1}{\pi}\left[\log(1+x)\right]_0^{\infty} = +\infty .$$

▷ **Esercizio 2.41** (prova d'esame del 24/09/2003)
Siano X e Y v.a. indipendenti con legge esponenziale di media 1 e 1/2, rispettivamente.
(i) Calcolare $P(X > 3|X > 1)$.
(ii) Se $U = \min(X, 2Y)$, calcolare la densità di U. Si tratta di una densità nota?
(iii) Calcolare $P(U \leq 4)$.

Soluzione. X e Y hanno legge esponenziale di parametri 1 e 2, rispettivamente.
(i) Per la proprietà di mancanza di memoria delle v.a. esponenziali, si ha:

$$P(X > 3|X > 1) = P(X > 1 + 2|X > 1) = P(X > 2).$$

Infatti, ricordando che la funzione di distribuzione di una v.a. esponenziale Z di parametro λ è $P(Z \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, e quindi $P(Z > t) = e^{-\lambda t}$, si ha:

$$P(X > 3|X > 1) = \frac{P(X > 3, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)} =$$

$$= \frac{e^{-3}}{e^{-1}} = e^{-2} = P(X > 2).$$

(ii) se $t \geq 0$, $P(U > t) = P(X > t, 2Y > t)$ e, per l'indipendenza di X e Y, questa probabilità è uguale a

$$P(X > t) \cdot P(Y > t/2) = e^{-t}e^{-2 \cdot t/2} = e^{-2t}.$$

Pertanto, per $t \geq 0$ risulta $P(U \leq t) = 1 - e^{-2t}$, quindi U è esponenziale di parametro 2.
(iii)

$$P(U \leq 4) = \int_0^4 2e^{-2t}dt = \Big[- e^{-2t} \Big]_0^4 = 1 - e^{-8}.$$

▷ **Esercizio 2.45** (prova d'esame del 15/7/2004)
Sia X una v.a. uniformemente distribuita in $[0, 1]$;
(i) posto $Y = -1/3 \log(1 - X)$, trovare la densità di Y;
(ii) se $Z = [Y]$, (cioè Z è la parte intera di Y), trovare la legge di Z e calcolarne, se esiste finita, la media $E(Z)$.

Soluzione. (i) Per $y \geq 0$, si ha:

$$P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{3}\log(1 - X) \leq y\right) = P(\log(1 - X) \geq -3y) =$$

$$= P(1 - X \geq e^{-3y}) = P(X \leq 1 - e^{-3y}) = 1 - e^{-3y}.$$

Inoltre $P(Y \leq y) = 0$, se $y < 0$; dunque Y ha legge esponenziale di parametro $\lambda = 3$, ovvero la sua densità è:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 3e^{-3y} & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Se k è un intero non negativo, si ha:

$$P(Z=k) = P([Y]=k) = P(Y \in [k, k+1)) =$$

$$= \int_k^{k+1} 3e^{-3x} dx = \ldots = (1-e^{-3})e^{-3k} \ .$$

Dunque, si riconosce che Z ha legge geometrica di parametro $p = 1-e^{-3}$, per cui $E(Z) = 1/p - 1 = e^{-3}/(1-e^{-3}) = 1/(e^3-1)$.

▷ **Esercizio 2.57** (I prova scritta a.a. 2011-12)
Per $a > 0$, sia X una v.a. di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

i) Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.
ii) Calcolare media e varianza di X.
iii) Trovare la densità di $Y = \sqrt{X}$.
iv) Trovare il valore di $a > 1/2$ affinché risulti $P(x \leq 1/2) = 1/2$.

Soluzione. (i) Si ha:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{2}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right) dt & \text{se } 0 < x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Siccome

$$\int_0^x \frac{2}{a}\left(1-\frac{t}{a}\right) dt = \frac{x}{a}\left(\frac{2a-x}{a}\right),$$

si ottiene:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{a}\left(\frac{2a-x}{a}\right) & \text{se } 0 < x < a \\ 1 & \text{se } x \geq a \end{cases} .$$

(ii) Si ha:

$$E(X) = \int_0^a \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) x dx = ... = a/3$$

$$E(X^2) = \int_0^a \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) x^2 dx = ... = a^2/6$$

e quindi:

$$Var(X) = a^2/6 - a^2/9 = a^2/18.$$

(iii) Si ha, per $0 < t \leq \sqrt{a}$:

$$P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = \frac{y^2}{a}\left(\frac{2a-y^2}{a}\right) = \frac{1}{a^2}\left(2ay^2 - y^4\right)$$

Derivando, si ottiene la densità di Y :

$$f_Y(y) = \frac{1}{a^2}(4ay - 4y^3)\mathbf{1}_{(0,\sqrt{a})}(y)$$

(iv) Si ha:

$$P(X \leq 1/2) = F(1/2) = \frac{1}{2a}\left(\frac{2a - 1/2}{a}\right) = \frac{4a-1}{4a^2}$$

Imponendo che $P(X \leq 1/2) = 1/2$, si trova:

$$\frac{4a-1}{4a^2} = \frac{1}{2}, \text{ ovvero } 2a^2 - 4a + 1 = 0$$

che ha soluzioni $a = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; siccome $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1/2$, il valore di a cercato è $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.