Fenomeni deterministici e casuali

- Sistemi deterministici
- Sistemi non deterministici (aleatori, casuali, random)

Nei sistemi deterministici è possibile conoscere esattamente lo stato del sistema, in quelli casuali no.

Es. 1

Un'urna contiene 6 palline numerate da 1 a 6 indistinguibili se non per il numero. Una pallina viene estratta a caso. I possibili risultati sono: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dire qual è la probabilità di ottenere 3, ad es., significa dare una valutazione di quanto facilmente il risultato possa essere 3. Se si vuole la probabilità che esca un n° dispari, si è interessati ad uno dei tre numeri $\{1, 3, 5\}$.

Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ spazio dei possibili risultati (o spazio degli eventi)

Ogni s.i. $A \subset \Omega$ si dice evento.

Ad es. $A = \{1, 3, 5\}$ è l'evento che esca un n° dispari; $B = \{1, 2, 3\}$ è l'evento che esca un n° minore di 4.

Se $A, B \subset \Omega$ sono eventi, allora:

1) $A \cap B = \{$evento che A e B si verificano entrambi$\}$
2) $A \cup B = \{$evento che uno almeno degli eventi A o B si verifica$\}$
3) $A^c = \{$evento che A non si verifichi$\}$

Ω è l'evento certo, ϕ l'evento impossibile

Una valutazione di probabilità è un'applicazione che ad ogni evento $A \subset \Omega$ associa un n° reale positivo, tanto più grande quanto più l'evento è probabile.

E' opportuno che, dati $A, B \subset \Omega$ eventi, sia ancora $A \cap B \subset \Omega$, $A \cup B \subset \Omega$, $A^c \subset \Omega$, cioè che la classe degli eventi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ sia stabile rispetto alle operazioni di intersezione, unione e passaggio al complementare.

Oss.

Nell'esempio dell'urna con le palline, $\Omega = \{1, \dots 6\}$ e $\mathcal{A} \equiv \mathcal{P}(\Omega) = \{\phi, \{1\}, \dots \{6\}, \{1,2\}, \dots \{1,2,3\} \dots \Omega\}$

$\# \mathcal{P}(\Omega) = 2^{\# \Omega}$

Spazi di probabilità

Un fenomeno casuale è caratterizzato da:

(i) un insieme Ω dei possibili risultati (spazio degli eventi)

(ii) una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tale che

a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

c) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Per ricorrenza, si ricava da a) che se $A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}$ allora $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$. Analogamente $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

<u>Definizione 1.</u>

Una famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ si dice una σ-algebra se:

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow$

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

In effetti b) segue da (ii) e a) (per la formula di De Morgan):

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c .$$

Analogamente a) segue da (ii) e b)

<u>Definizione 2.</u>

Sia Ω un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra.
Una probabilità P è un'applicazione $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ tale che:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$, $i,j = 1 \ldots n$)
allora: (σ-additività)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(Si può sostituire con l'assioma di continuità, ad esso equivalente! se $A_n \searrow \emptyset = \bigcap A_n \Rightarrow \lim_n P(A_n) = 0$)

<u>Definizione 3</u>

Si chiama <u>spazio di probabilità</u> una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ove Ω è un insieme, $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di Ω, P è una probabilità su $\mathcal{A}$.

Nell' Esempio 1 è ragionevole scegliere:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Qual è P ?

Per la natura del problema, se le palline sono indistin=guibili, è giusto supporre che i possibili risultati si verifichino tutti con uguale probabilità (<u>eventi elementari equiprobabili</u>), cioè:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = p$$

Poiché deve aversi:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = 6p$$

(gli eventi dell'unione sono disgiunti)

allora $p = \frac{1}{6}$, come era logico supporre.

Se $A \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ è un evento, deve aversi

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \quad , \quad a \in \{1, 2, \dots 6\}$$

e porremo

$$P(A) = \sum_{a \in A} P\{a\} = \sum_{a \in A} \frac{1}{6} = \frac{\# A}{6}.$$

Per esempio, se $A = \{1, 3, 6\}$ è $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Se Ω avesse avuto $\# \Omega$ elementi, sarebbe stato

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} \quad , \quad A \text{ evento} \subset \Omega. \quad A \in \mathcal{A}.$$

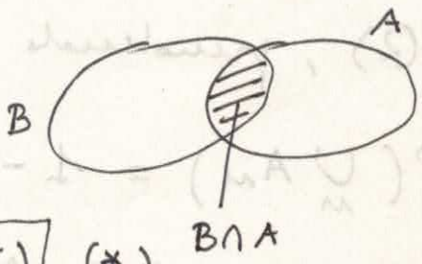
Proprietà degli spazi di probabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno sp. di probabilità.

Se $A \in \mathcal{A}$ anche $A^c \in \mathcal{A}$ e $A \cup A^c = \Omega$.

Se $B \in \mathcal{A}$, si può scrivere

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$



con $B \cap A$ e $B \cap A^c$ disgiunti.

(1) Allora $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)}$ (*)

Da (*) prendendo $B = \Omega$:

(2) $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow \boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$

(3) $\boxed{\text{Se } A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$

Da (*) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B \cap A^c)$
$\geq P(A)$

<u>Oss</u>. $A \subset B$ significa che l'evento $A \Rightarrow$ l'evento B, cioè se si verifica A, allora si verifica anche B.

<u>Esempio</u>. Nel caso dell'estrazione delle palline dall'urna, sia A l'evento che esca 2 oppure 4, cioè $A = \{2, 4\}$ e B l'evento che esca una pallina con un numero pari, cioè $B = \{2, 4, 6\}$.
Dunque $A \subset B$ e $A \Rightarrow B$. Infatti, se si verifica l'evento A, esce il numero 2 oppure 4, dunque senz'altro un n° pari e dunque si verifica l'evento B.

(4) $$\boxed{P\Big(\bigcup_n A_n\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_n A_n^c\Big)}$$

Infatti $\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c$, quindi $\bigcup_n A_n = \left(\bigcap_n A_n^c\right)^c$

Per (2), prendendo $A = \bigcap_n A_n^c$, si ha:

$$P\Big(\bigcup_n A_n\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_n A_n^c\Big).$$

Esempio: qual è la probabilità di ottenere almeno una volta 6 lanciando due volte un dado?

~~[illegible]~~ Lo spazio degli eventi è

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2),\ \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, \ldots 6\}\}$$

$\# \Omega = 6 \times 6 = 36$. Vogliamo calcolare $P(A)$, ove

$$A = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = 6 \text{ oppure } \omega_2 = 6\}.$$

Sia $A_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = 6\}$ e

$A_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_2 = 6\}$. Risulta:

$A = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \{(6,6)\}$.

$$A_1^c \cap A_2^c = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \neq 6,\ \omega_2 \neq 6\}$$
$$= \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_{1,2} \in \{1, \ldots 5\}\}$$

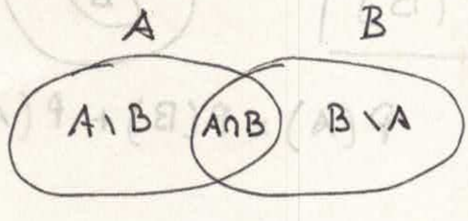
$$P(A_1^c \cap A_2^c) = \frac{\# A_1^c \cap A_2^c}{\# \Omega} = \frac{5 \times 5}{36} = \frac{25}{36}$$

Allora per (4):

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0.306.$$

Per esteso: le possibilità sono: (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)
(6,6); (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6); appunto 11/36

⑤ (Unione di eventi anche non disgiunti)



$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ (unione disgiunta)

Inoltre: $\left.\begin{array}{l} A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \end{array}\right.$

Allora:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) =$$
$$= P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Riprendiamo l'esempio precedente;

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{6} \; ; \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{2}{6} - \frac{1}{36} = \frac{12-1}{36} = \frac{11}{36} .$$

⑥ $$\boxed{\begin{array}{l} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ \qquad - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

Infatti: $P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) =$

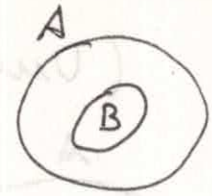
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - \left[P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \right] =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - \left[P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \right]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) .$

(7) Se $B \subset A$

$$\boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(B)}$$



Infatti $A = B \cup (A \setminus B)$ e $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$

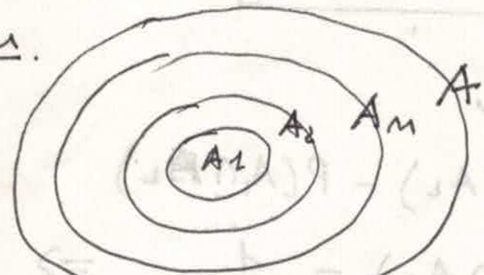
TEOREMA

i) Sia $\{A_n\}$ una succ. crescente di eventi $(A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots)$ e $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
Allora $P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

ii) Sia $\{A_n\}$ una succ. decrescente di eventi $(A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots)$ e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Allora $P(A) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

Dim.

(i)



Poniamo $B_1 = A_1$; $B_2 = A_2 \setminus A_1$; $B_3 = A_3 \setminus A_2$; ..
$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Risulta $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \cup \dots$
$\dot{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (unione disgiunta)

Allora $P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

Ma $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ e per (7) $P(B_k) = P(A_k) - P(A_{k-1})$

Dunque $\sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \cancel{P(B_1)} + [\cancel{P(A_2)} - \cancel{P(A_1)}] + [\cancel{P(A_3)} - \cancel{P(A_2)}]$
$+ \dots + [P(A_n) - \cancel{P(A_{n-1})}] = P(A_n)$. Segue

$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$ ☐