Esercizi su formula di Itô

1. Scrivere il differenziale stocastico dei seguenti processi:
(i) $X_t = B_t^2$
(ii) $X_t = t + e^{B_t}$
(iii) $X_t = B_t^3 - 3tB_t$
(iv) $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$
(v) $X_t = [B_1(t)]^2 + [B_2(t)]^2$
(vi) $X_t = (B_t + t)\exp(-B_t - t/2)$
(vii) $X_t = \exp(t/2)\sin B_t$

2. Sia $Y_t = tB_t$. Calcolare $dY_t,\ E(Y_t)$ e $E(Y_tY_s)$.

3. Mostrare che $X_t = \int_0^t \sin s \; dB_s$ è definito;
(i) mostrare che X_t è un processo Gaussiano e calcolare $E(X_t)$ e $E(X_sX_t)$;
(ii) calcolare $E(X_t|\mathcal{F}_s)$;
(iii) mostrare che $X_t = \sin tB_t - \int_0^t \cos sB_s \; ds$.

4. Mostrare che $I(t) = \int_0^t B_s \; ds$ è un processo Gaussiano con media 0 e varianza $t^3/3$. Trovare la legge della media temporale di B_t nell'intervallo $[0,T]$, ovvero $\frac{1}{T}\int_0^T B_t \; dt$.

5. Per $\lambda > 0$ poniamo $X_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dB_s$.
(i) Mostrare che $X_t = e^{-\lambda t}B_t + \lambda\int_0^t e^{-\lambda s}B_s \; ds$.
(ii) Mostrare che esiste $\lim_{t\to+\infty} X_t = Z$ in L^2 e determinare la legge di Z.

6. Se $dX_t = b_1(X_t)dt + \sigma_1(X_t)dB_t$ e $dY_t = b_2(Y_t)dt + \sigma_2(X_t)dB_t$, provare che

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t)dt$$

ovvero vale la *formula di integrazione per parti*:

$$\int_0^T X_tdY_t = \Big[X_tY_t\Big]_0^T - \int_0^T Y_tdX_t - \int_0^T \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t)dt$$

Soluzioni degli esercizi su formula di Itô

1. Ricordiamo la formula di Itô nel caso unidimensionale, per il differenziale stocastico di una funzione $f(t, X(t))$ con $dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB_t$:

$$df(t, X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \sigma^2(X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}\ b(X(t))\right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}\ \sigma(X(t))dB_t$$

(i) per $f(x) = x^2$, dalla formula di Itô si ricava:

$$dX(t)) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt = 2B_t dB_t + dt$$

e quindi:

$$B_t^2 = t + \int_0^t 2B_s dB_s$$

(ii) per $f(t, x) = t + e^x$, dalla formula di Itô si ricava:

$$dX(t)) = \left(\frac{1}{2}e^{B_t} + 1\right) dt + e^{B_t} dB_t$$

(iii) per $f(t, x) = x^2 - 3tx$, dalla formula di Itô si ricava:

$$dX(t) = \left[-3B_t + \frac{1}{2} \cdot 6B_t\right] dt + (3B_t^2 - 3t)dB_t = (3B_t^2 - 3t)dB_t$$

(iv) per $f(t, x) = 1 + 2t + e^x$, dalla formula di Itô si ricava:

$$d(X_(t)) = \left[2 + \frac{1}{2}e^{B_t}\right] dt + e^{B_t} dB_t$$

(v) Ricordiamo la formula di Itô nel caso bidimensionale, per il differenziale stocastico di una funzione $f(t, X(t), Y(t))$ con

$$dX(t) = b_1(X(t), Y(t))dt + \sigma_{11}(X(t), Y(t))dB_t^1 + \sigma_{12}(X(t), Y(t))dB_t^2$$

$$dY(t) = b_2(X(t), Y(t))dt + \sigma_{21}(X(t), Y(t))dB_t^1 + \sigma_{22}(X(t), Y(t))dB_t^2,$$

oppure in notazione matriciale

$$\begin{pmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ dB_t^2 \end{pmatrix} .$$

Si ha:

$$df(t, X(t), Y(t)) = \Big[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\ b_1(X(t), Y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}\ b_2(X(t), Y(t)) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ a_{11}(X(t),Y(t))+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ a_{12}(X(t),Y(t))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ a_{22}(X(t),Y(t))\right)\Big]dt+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sigma_{11}dB_t^1+\sigma_{12}dB_t^2\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sigma_{21}dB_t^1+\sigma_{22}dB_t^2\right)$$

dove $a=\sigma\sigma^T$.
Se, più semplicemente, $X(t)$ e $Y(t)$ sono processi di Itô rispetto allo stesso moto Browniano B_t :

$$dX(t)=b_1(X(t))dt+\sigma_1(X(t))dB_t \text{ e } dY(t)=b_2(Y(t))dt+\sigma_2(Y(t))dB_t$$

allora:

$$df(t,X(t),Y(t))=\Big[\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}b_1(X(t))+\frac{\partial f}{\partial y}b_2(Y(t))+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma_1^2(X(t))+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sigma_1(X(t))\sigma_2(Y(t))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sigma_2^2(Y(t))\right)\Big]dt+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_1(X(t))dB_t+\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2(Y(t))dB_t$$

Infatti, ora

$$B_t^1=B_t^2,\ \sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix},\ a=\sigma\sigma^T=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

Allora, se $f(x,y)=x^2+y^2$, otteniamo:

$$dX(t)=d(B_1^2(t)+B_2^2(t))=2dt+2B_1(t)dB_1(t)+2B_2(t)dB_2(t)$$

(vi) Se $f(t,x)=(x+t)e^{-x-t/2}$, otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=e^{-x-t/2}-\frac{1}{2}(x+t)e^{-x-t/2}=e^{-x-t/2}(1-(x+t)/2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-x-t/2}-(x+t)e^{-x-t/2}=e^{-x-t/2}(1-x-t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2e^{-x-t/2}+(x+t)e^{-x-t/2}=e^{-x-t/2}(x+t-2)$$

Quindi:

$$dX(t))=\left[e^{-B_t-t/2}(1-(B_t+t)/2)+\frac{1}{2}e^{-B_t-t/2}(B_t+t-2)\right]dt+e^{-B_t-t/2}(1-B_t-t)dB_t$$

(vii) Se $f(t,x)=e^{t/2}\sin x$, otteniamo:

$$d\left(e^{t/2}\sin B_t\right)=\left[\frac{1}{2}e^{t/2}-\frac{1}{2}sin(B_t)e^{t/2}\right]dt+e^{t/2}\cos(B_t)dB_t$$

2. Posto $f(t,x) = tx$, dalla formula di Itô si ricava:

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$$

ovvero

$$Y_t = tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

Allora $E(Y_t) = 0$ e $E(Y_s Y_t) = E(sB_s tB_t) = st \cdot \min(s,t)$; Y_t è un processo Gaussiano (poiché è t volte B_t), con media zero e funzione di covarianza $st \cdot \min(s,t)$.

3. $X_t = \int_0^t \sin s dB_s$ è ben definito, visto che $\int_0^t \sin^2 s ds < \infty \; \forall t$. Il processo X_t è Gaussiano, essendo un integrale stocastico con integrando deterministico. Si ha:

$$E(X_t) = E\left(\int_0^t \sin s dB_s\right) = 0$$

$$E(X_t^2) = E\left(\int_0^t \sin s dB_s\right)^2 = \int_0^t \sin^2 s ds$$

Inoltre, sempre dalla teoria, per $u \leq t$:

$$E(X_u X_t) = E\left(\int_0^u \sin s dB_s \cdot \int_0^t \sin s dB_s\right) =$$

$$= E\left[\left(\int_0^t \mathbf{1}_{(0,u)}(s) \sin s dB_s\right)\left(\int_0^t \sin s dB_s\right)\right] =$$

$$= \int_0^t E(\mathbf{1}_{(0,u)}(s) \sin^2 s) ds = \int_0^u \sin^2 s ds = \int_0^{\min(u,t)} \sin^2 s ds =$$

$$= \frac{1}{2}(u \wedge t) - \frac{1}{2}[\sin(u \wedge t) \cos(u \wedge t)]$$

Dalla teoria segue anche che, essendo un integrale stocastico, X_t è una martingala, cioé $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \; s < t$.
(iii) Integrando per parti (vedi esercizio 6) o usando la formula di Itô si ricava:

$$X_t = \int_0^t \sin s dB_s = \Big[\sin t B_t\Big]_0^t - \int_0^t \cos s B_s ds = \sin t B_t - \int_0^t \cos s B_s ds$$

4. Dalla formula di Itô segue che $d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$ per cui

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

Allora

$$I(t)=\int_0^t B_s ds = tB_t - \int_0^t s dB_s = \int_0^t t dB_s - \int_0^t s dB_s = \int_0^t (t-s) dB_s$$

e dunque $I(t)$ è un processo Gaussiano, con media zero e varianza

$$\int_0^t (t-s)^2 ds = \frac{t^3}{3}.$$

Quindi $I(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$; segue che $\frac{1}{T}\int_0^T B_t dt$ ha distribuzione normale di media zero e varianza

$$\frac{1}{T^2}\,\frac{T^3}{3} = \frac{T}{3}\ .$$

5. (i) Per la formula di Itô:

$$d\left(e^{-\lambda t} B_t\right) = -\lambda e^{-\lambda t} B_t dt + e^{-\lambda t} dB_t$$

da cui:

$$X_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dB_s = \left[e^{-\lambda s} B_s\right]_0^t + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} B_s ds = e^{-\lambda t B_t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} B_s ds$$

(ii) Per $t > s$:

$$E\left[|X_t - X_s|^2\right] = E\left[\left(\int_s^t e^{-\lambda u} dB_u\right)^2\right] = \int_s^t \left(e^{-\lambda u}\right)^2 du = \frac{1}{2\lambda}\left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}\right)$$

Dunque X_t è di Cauchy in L^2, ovvero $\exists\ Z \doteq \lim_{t\to\infty} X_t$ (in L^2). Siccome X_t è un processo Gaussiano, esso ha legge normale per ogni t, e anche il limite in L^2, Z, ha legge normale con media $\lim E(X_t) = 0$ e varianza

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t^2) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-2\lambda u} du = \frac{1}{2\lambda}.$$

Pertanto, X_t converge in legge a $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\lambda})$.

6. Mostriamo che

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t) dt$$

ovvero

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t \sigma_1(X_s)\sigma_2(Y_s) ds$$

da cui segue la regola di integrazione per parti. Ricordiamo la formula di Itô per il differenziale di una funzione $f(t, X_t, Y_t)$ (vedi Esercizio 1 (v)):

$$df(t, X(t), Y(t)) = \Big[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} b_1(X(t)) + \frac{\partial f}{\partial y} b_2(Y(t)) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma_1^2(X(t)) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sigma_1(X(t))\sigma_2(Y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sigma_2^2(Y(t))\right)\Big] dt +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_1(X(t))dB_t + \frac{\partial f}{\partial y}\sigma_2(Y(t))dB_t$$

Prendendo $f(x, y) = xy$, otteniamo:

$$d(X_t Y_t) = [Y_t b_1(X_t) + X_t b_2(Y_t) + \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t)]dt + Y_t \sigma_1(X_t)dB_t + X_t \sigma_2(Y_t)dB_t =$$

$$= Y_t[b_1(X_t)dt + \sigma_1(X_t)dB_t] + X_t[b_2(Y_t)dt + \sigma_2(Y_t)dB_t] + \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t)dt =$$

$$= X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1(X_t)\sigma_2(Y_t)dt$$