Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
I prova scritta 30 giugno 2025

Punteggi: **1:** 2.5×4; **2:** 3×4; **3:** 4×2.

1. Sia T una variabile aleatoria assolutamente continua e positiva, tale che per ogni $t > 0$:

$$P(T > t) = e^{-(\ln 3 - \ln 2)t}.$$

(i) Posto $Z = [T] + 1$ ($[\ \ ]$ denota la parte intera), trovare la distribuzione di Z e calcolarne media e varianza.
(ii) Sia W una v.a. indipendente da Z e tale che $W - 1$ abbia distribuzione Geometrica, di parametro $2/3$; calcolare $P(Z = 3, W < 2)$ e $P(Z + W = 2 | W < 2)$.
(iii) Trovare la densità di $U = Z + W$ e calcolare $cov(2Z + 2W, 3W)$.
(iv) Calcolare $P(Z \geq 3W)$.

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio tale che Y sia esponenziale di parametro λ mentre la densità condizionale di X dato $\{Y = y\}$ è data da:

$$f_{X|Y}(x|y) = ye^{-yx} I_{(0,+\infty)}(x).$$

(i) Trovare la densità di X.
(ii) Trovare la densità della variabile aleatoria $Z = XY$. Si tratta di una legge nota?
(iii) Trovare la densità condizionale di Y dato $\{X = x\}$ e $E(Y|X = 1)$.
(iv) Trovare la densità di (X, Z), dove $Z = Y - X$.

3. Si vuole verificare il carico di rottura medio di alcuni cavi. A tale scopo, si eseguono 20 prove di rottura su altrettanti cavi identici, ottenendo carichi di rottura $x_1, \ldots, x_{20}$ con media campionaria pari a $\bar{x}_n = 10.49\ t$ (t = tonnellate). Da considerazioni teoriche, si può assumere che il campione $x_1, \ldots, x_{20}$ abbia deviazione standard pari a $\sigma = 1.2\ t$.
(i) Trovare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha = 0.99$ per il carico di rottura medio μ.
(ii) Determinare la dimensione minima del campione affinché l'ampiezza dell'intervallo di confidenza a livello 0.99 per la media μ non superi $0.514\ t$.

Soluzioni I prova scritta 30 giugno 2025

1. Si riconosce subito che T ha densità esponenziale di parametro $\lambda = \ln 3 - \ln 2$.

La v.a. Z assume valori interi $\{1, 2, \dots\}$; per $k = 1, 2 \dots$ si ha:

$$P(Z = k) = P(T \in [k-1, k)) = 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1},$$

quindi Z ha distribuzione Geometrica modificata di parametro $p = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-(\ln 3 - \ln 2)} = 1 - e^{\ln(2/3)} = 1 - 2/3 = 1/3$.

(ii) Z e W sono v.a. indipendenti e geometriche modificate di parametro $p = 1/3$ e $1 - p = 2/3$, rispettivamente. Pertanto, $E(Z) = 1/p = 3$, $Var(Z) = (1-p)/p^2 = 6; E(W) = 1/(1-p) = 3/2$, $Var(W) = (1 - (1-p))/(1-p)^2 = 3/4$.

(iii) Si ha:

$$P(Z = 3, W < 2) = P(Z = 3, W = 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

Inoltre

$$P(Z + W = 2 | W < 2) = P(Z + W = 2 | W = 1) = \frac{P(Z + W = 2, W = 1)}{P(W = 1)}$$

$$= \frac{P(Z = 1, W = 1)}{P(W = 1)} = \frac{P(Z = 1) \cdot P(W = 1)}{P(W = 1)} = P(Z = 1) = 1/3.$$

(iv) Se $U = Z + W$, allora $U \in \{2, 3, \dots\}$ e dalla formula di convoluzione, visto che Z e W sono indipendenti, si ha per $i = 2, 3, \dots$:

$$P(U = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(Z = k)P(W = i - k) = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} =$$

(si osservi che deve essere $i - k \geq 1$, pertanto k deve variare tra 1 e $i - 1$)

$$= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i} \cdot 3^{k+1} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{i} \cdot 3^2 \sum_{k=1}^{i-1} \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} \cdot 3^{k-1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i} \sum_{k=1}^{i-1} 2^{k-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i} \sum_{h=0}^{i-2} 2^h = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{1 - 2^{i-1}}{-1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}(2^{i-1} - 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}.$$

Un semplice controllo mostra che

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\right] = 1.$$

Infatti:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i - 2\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \left(\frac{1}{1-2/3} - 2/3 - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1-1/3} - 1/3 - 1\right)$$
$$= 4/3 - 2(1/6) = 1.$$

Si ha:

$$cov(2(Z+W), 3W) = E[6(Z+W)W] - 6E(Z+W)E(W)$$
$$= 6[E(ZW) + E(W^2) - E(Z)E(W) - E^2(W)] = 6Var(W) = 6\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{2},$$

in quanto $E(ZW) - E(Z)E(W) = 0$, essendo Z e W indipendenti.
(v) Si ha:

$$P(Z < 3W) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z < 3k)P(W = k).$$

Intanto, $P(Z < 3k) = P(Z \le 3k-1) = 1 - P(Z > 3k-1) = (1-(1-1/3)^{3k-1}$.
Quindi:

$$P(Z < 3W) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z < 3k)P(W = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3k-1}\right)\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{3k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^k$$
$$= 1 - 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}\right)^k = 1 - 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{81}\right)^k$$
$$= 1 - 3\left(\frac{1}{1-8/81} - 1\right) = 1 - 3\left(\frac{81-73}{73}\right) = \frac{49}{73} = 0.671$$

Infine $P(Z \ge 3W) = 1 - P(Z < 3W) = 1 - \frac{49}{73} = \frac{24}{73} = 0.328$.

2. La densità congiunta del vettore (X, Y) ha l'espressione

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda y e^{-\lambda y} e^{-yx} I_{(0,+\infty)}(x) I_{(0,+\infty)}(y).$$

(i) La densità di X è nulla per $x \le 0$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \lambda y e^{-yx} e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda}{(x+\lambda)}\int_0^{+\infty}(x+\lambda) y e^{-(x+\lambda)y} dy =$$

$$= \frac{\lambda}{(x+\lambda)^2},$$

essendo l'integrale al secondo membro l'espressione del valore medio di una variabile aleatoria esponenziale di parametro $(x+\lambda)$.

(ii) Sia $Z = XY$. Allora, per ogni $t > 0$:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(X \le \frac{z}{Y}\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\frac{t}{y}} dx \ \lambda y e^{-yx} e^{-\lambda y} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \int_0^{\frac{t}{y}} dx \ y e^{-yx} =$$

$$= (1 - e^{-z}) \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = (1 - e^{-z}).$$

Dunque, $Z \sim Exp(1))$.

(iii) La densità condizionale di Y dato $\{X = x\}$, $x > 0$ è nulla per $y \le 0$, mentre per $y > 0$ si ha

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda y e^{-\lambda y} e^{-yx}}{\frac{\lambda}{(x+\lambda)^2}} = (x+\lambda)^2 y e^{-(\lambda+x)y},$$

ovvero è una densità $\Gamma(2, (\lambda + x))$. Di conseguenza $E(Y|X=1) = \frac{2}{\lambda+1}$.

(iv) Consideriamo la trasformazione $g : (X,Y) \longrightarrow (X,Z)$

$$\begin{cases} X = X \\ Z = Y - X \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} X = X \\ Y = X + Z \end{cases}$$

con

$$J_{g^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ det J_{g^{-1}}(x,z) = 1.$$

Allora, la densità di (X,Z) è :

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f(x, x+z) \cdot 1 = \lambda(x+z) e^{-(x+z)(\lambda+x)}, \text{ per } x, z > 0.$$

3. (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria, e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 20$, $\bar{x} = 10.49$ e $\sigma = 1.2$ Da $1 - \alpha = 0.99$ segue $1 - \alpha/2 = 0.995$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.57$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene l'intervallo:

$$I = \left(10.49 - \frac{1.2 \cdot 2.57}{\sqrt{20}}, \ 10.49 + \frac{1.2 \cdot 2.57}{\sqrt{20}}\right) = (9.79, 11.18).$$

(ii) L'ampiezza dell'intervallo di confidenza è $a = \frac{2 \cdot 1.2}{\sqrt{n}} \cdot 2.57$; imponendo che $a \le 0.514$ si ottiene una disequazione nell'incognita n che, risolta, fornisce $n \ge 144$.