Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
I Prova scritta 2022

Punteggi: **1:** 3×4; **2:** 3×4; **3:** 3×2.

1. Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua, per cui risulti $P(X > t) = e^{-(\ln 3 - \ln 2)t}$, per ogni $t > 0$.
(i) Posto $Y = [X]+1$ ([ ] denota la parte intera), trovare la distribuzione di Y e calcolarne media e varianza.
(ii) Sia Z una v.a. indipendente da Y e tale che $Z-1$ abbia distribuzione Geometrica, di parametro 2/3; calcolare $P(Y = 3, Z < 2)$ e $P(Y + Z = 2|Z < 2)$.
(iii) Trovare la densità di $W = \min(Y, Z)$ e calcolare $cov(2(Y + Z), 3Z)$.
(iv) Calcolare $P(Y \geq 3Z)$.

2. Per $k > 0$, si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{se } (x,y) \in [0,3]^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Dopo aver determinato la costante k, in modo che f sia la densità di una v.a. bidimensionale assolutamente continua (X, Y), trovare le densità marginali di X e Y e dire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.
(ii) Calcolare la probabilità dell'evento $A = \{X \geq 0,\ Y \leq 2X\}$.
(iii) Calcolare media e varianza e covarianza di X, Y.
(iv) Posto $Z = X - Y$, trovare la densità di Z e calcolare $P(Z \leq 0)$.

3. Sia X una v.a. con distribuzione normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 25$.
(i) Per $\mu = 4$, trovare t e s tali che $P(X \leq t) = 1/2$ e $P(X \leq s) = 0.84$.
(ii) Supponiamo ora che μ sia incognito. Determinare un intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$ sapendo che l'osservazione di un campione di dimensione $n = 400$ di v.a. indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X ha prodotto media campionaria $\overline{x}_n = 3.6$.

Soluzioni della I prova scritta di CPS, 2022

1. Si riconosce subito che X ha densità esponenziale di parametro $\lambda = \ln 3 - \ln 2$.
(i) La v.a. Y assume valori interi $\{1, 2, \ldots\}$; per $k = 1, 2 \ldots$ si ha:

$$P(Y = k) = P(X \in [k-1, k)) = 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1},$$

ovvero Y ha distribuzione Geometrica modificata di parametro

$$p = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-(\ln 3 - \ln 2)} = 1 - e^{\ln(2/3)} = 1 - 2/3 = 1/3.$$

Pertanto, $E(Y) = 1/p = 3,\ Var(Y) = (1-p)/p^2 = 6$.
(ii) Y e Z sono v.a. indipendenti e geometriche modificate di parametro $p = 1/3$ e $1 - p = 2/3$, rispettivamente. Quindi

$$P(Y = 3, Z < 2) = P(Y = 3, Z = 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

Inoltre

$$P(Y + Z = 2 | Z < 2) = P(Y + Z = 2 | Z = 1) = \frac{P(Y + Z = 2, Z = 1)}{P(Z = 1)}$$

$$= \frac{P(Y = 1, Z = 1)}{P(Z = 1)} = \frac{P(Y = 1) \cdot P(Z = 1)}{P(Z = 1)} = P(Y = 1) = 1/3.$$

(iii) Notiamo che W assume valori in $\mathbf{N} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Inoltre per l'indipendenza di Y e Z si ha:

$$P(W > k) = P(\min(Y, Z) > k) = P(Y > k, Z > k) = P(Y > k)P(Z > k) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)^k$$

e quindi W ha una legge geometrica modificata di parametro $\frac{7}{9}$.
Si ha inoltre:

$$cov(2(Y + Z), 3Z) = E[6(Y + Z)Z] - 6E(Y + Z)E(Z)$$

$$= 6[E(YZ) + E(Z^2) - E(Y)E(Z) - E^2(Z)] = 6Var(Z) = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2},$$

in quanto $E(YZ) - E(Y)E(Z) = 0$, essendo Y e Z indipendenti.
(iv) Si ha:

$$P(Y \geq 3Z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \geq 3k)P(Z = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y > 3k - 1)P(Z = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3k-1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}^{k-1} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3k} \cdot \frac{1}{3}^{k} =$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{81}\right)^{k} = 3 \cdot \frac{8}{81} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{81}} = \frac{24}{81 - 8} = \frac{24}{73}.$$

2. Si ha:

$$\int_0^3 dx \int_0^3 dy(x+y) = 27,$$

per cui $k = \frac{1}{27}$.
(i) Si ha:

$$f_X(x) = \int_0^3 dy \frac{1}{27}(x+y) = \frac{x}{9} + \frac{1}{6}\ , x \in [0,3].$$

Analogamente, vista la simmetria, si ottiene $f_Y(y) = f_X(y) = \frac{y}{9} + \frac{1}{6}\ , y \in [0,3]$. Ovviamente, X e Y non sono indipendenti, in quanto $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.
(ii) Si ha:

$$P(A) = \frac{1}{27} \int_0^{3/2} dx \int_0^{2x} (x+y)dy + \frac{1}{27} \int_{3/2}^{3} dx \int_0^3 (x+y)dy = ...$$

(iii) Si ha:

$$E(X) = E(Y) = \int_0^3 x \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{7}{4}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \int_0^3 x^2 \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{15}{4}$$

per cui

$$Var(X) = Var(Y) = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

(iv) Si ha:

$$E(XY) = \int_0^3 dx \int_0^3 dy \frac{1}{27}(x^2 y + x y^2) = 3,$$

Pertanto $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3 - \frac{49}{16} = -\frac{1}{16}$.
(iv) Come è facile vedere, $Z = X - Y \in [-3,3]$.
Per $t \in [-3,0]$ si ha:

$$P(Z \leq t) = \int \int_{[0,3]^2 \cap \{y \geq x - t\}} \frac{1}{27}(x+y)dxdy = \int_{-t}^{3} dy \int_0^{y+t} \frac{1}{27}(x+y)dx =$$

$$\frac{1}{27} \int_{-t}^{3} (\frac{3}{2}y^2 + 2ty + \frac{t^2}{2})dy = \frac{1}{27}(\frac{y^3}{2} + ty^2 + \frac{t^2}{2}y)\|_{-t}^{3} = (\frac{1}{18}t^2 + \frac{t}{3} + \frac{1}{2}).$$

Per $t \in [0,3]$ si ha:

$$P(Z \le t) = 1 - \int_t^3 dx \int_0^{x-t} \frac{1}{27}(x+y)dy = 1 - \frac{1}{27}\int_t^3 (\frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{t^2}{2})dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{27}(\frac{x^3}{2} - tx^2 + \frac{t^2 x}{2})\|_t^3 = (1 - \frac{t^2}{18} + \frac{t}{3} - \frac{1}{2}) = -\frac{t^2}{18} + \frac{t}{3} + \frac{1}{2}.$$

Derivando, si ottiene la densità di Z:

$$f_Z(z) = I_{[-3,0]}(z)(\frac{z}{9} + \frac{1}{3}) + I_{[0,3]}(z)(-\frac{z}{9} + \frac{1}{3})$$

Inoltre $P(Z \le 0) = \frac{1}{2}$.
(v) Basta prendere $g(u,v) = f_X(u) f_Y(v) = \left(\frac{u}{9} + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{v}{9} + \frac{1}{6}\right),\ u, v \in [0,3]$.

3. (i) Si ha:

$$P(X \le t) = P((X-4)/5 \le (t-4)/5) = \Phi((t-4)/5)$$

Pertanto: $P(X \le t) = 1/2 = \Phi(0)\ \Rightarrow (t-4)/5 = 0$, ovvero $t = 4$.
$P(X \le s) = 0.84 = \Phi(1)\ \Rightarrow (s-4)/5 = 1$, ovvero $s = 9$.

(ii) Come noto, un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita μ di una distribuzione di cui è nota la varianza σ^2 è il seguente:

$$I = \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right],$$

dove $\bar{x}_n$ denota la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso attuale, risulta $\bar{x}_n = 3.6$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$, $n = 400$. Essendo $1-\alpha = 0.95$, si ha $\alpha/2 = 0.025$, $1-\alpha/2 = 0.975$ e $\phi_{1-\alpha/2} = 1.96$. In conclusione, un intervallo di confidenza per μ al livello 0.95 è

$$\left[3.6 - \frac{5}{\sqrt{400}} \cdot 1.96,\ 3.6 + \frac{5}{\sqrt{400}} \cdot 1.96\right] = [3.11,\ 4.09]\ .$$