Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Prima prova scritta
A.A. 2018-2019

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $3 + 3 + 3$; **2)** $2 + 5 + 4 + 4$; **3)** $3 + 3$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Sia Z una variabile aleatoria a valori interi positivi tale che, per $n \geq 1$, risulti $P(Z \leq n) = 1 - (2/3)^n$, e W un'altra v.a., indipendente da Z e con la stessa distribuzione di Z.

(i) Calcolare $P(Z^2 < W^2)$.

(ii) Calcolare $E[(Z-1)^2 - \frac{1}{2}(1-W)^2]$.

(iii) Siano X e Y v.a. indipendenti con distribuzione di Poisson e tali che $E(X^2) = E(Y^2) = 12$. Calcolare

$$P\left(2 - XY \leq \frac{X^2+Y^2}{2} < 8 - XY\right).$$

Esercizio 2 Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha\left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right] & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \alpha\left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right] \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

(i) Trovare il valore $\bar{\alpha}$ di α in modo che $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$ sia la densità congiunta di un vettore aleatorio bidimensionale.

(ii) Si consideri la v.a. bidimensionale (X,Y) che ha per densità $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$; si calcolino le densità marginali di X e Y, $E(X)$, $E(Y)$ e $cov(X,Y)$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

(iii) Trovare la densità di $Z = X + 2Y$ e calcolare $P(Y \leq 2X + 1)$.

(iv) Calcolare $P(Y \leq X | X > 1)$.

Esercizio 3 Alcuni studenti effettuano delle misurazioni per determinare il punto di fusione dello stagno. Dai dati ottenuti da 100 diverse misurazioni effettuate, si trova una media campionaria di 231.8°C.

(i) Supponendo che il punto di fusione cercato sia distribuito secondo una v.a. con

deviazione standard $\sigma = 15.4$°C, trovare un intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha = 0.95$ per la temperatura media di fusione dello stagno.

(ii) Supponiamo ora che i dati $X_i,\ i = 1, \ldots, 100$, ottenuti dalle misurazioni siano estratti da una stessa distribuzione con media 231.8 e varianza σ^2, dove σ è quella del precedente punto (i). Utilizzando l'approssimazione normale, calcolare $P(\overline{X}_{100} \leq 232)$, dove

$\overline{X}_{100} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{100}}{100}$. Si tratta di una probabilità minore o maggiore di 1/2 ?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2018-19

Soluzioni della prima prova scritta

Esercizio 1 Dal fatto che $P(Z > n) = (2/3)^n$, si desume che Z è geometrica modificata di parametro $p = 1/3$, quindi $P(Z = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ e $E(Z) = 1/p = 3$.

(i) Si ha:

$$P(Z^2 < W^2) = P(|Z|) < |W|) = P(Z < W)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(Z < k)P(W = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right],$$

visto che $P(Z < k) = 1 - P(Z \geq k) = 1 - P(Z > k-1) = 1 - (\frac{2}{3})^{k-1}$. Continuando il calcolo:

$$P(Z^2 < W^2) = \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-2}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1 - 4/9} - 1\right) = 1 - \frac{3}{4}(9/5 - 1) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

(ii) Si ha:

$$E[(Z-1)^2 - \frac{1}{2}(1-W)^2] = E[Z^2 - 2Z + 1/2 + Z - W^2/2].$$

Visto che

$$E(Z^2) = E(W^2) = Var(Z) + E^2(Z) = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2},$$

la media cercata vale

$$\frac{2-p}{p^2} - 2/p + 1/2 + 1/p - \frac{1}{2} \cdot \frac{2-p}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2-p}{p^2} - 1/p + 1/2 = \cdots = 5,$$

dove si è sostituito $p = 1/3$.

(iii) X e Y hanno distribuzione di Poisson di parametro λ, da trovare. Siccome media e varianza di una v.a. di Poisson sono uguali a λ, si ha $E(X^2) = Var(X) + E^2(X) = \lambda + \lambda^2$; imponendo che $\lambda + \lambda^2 = 12$, si ottiene una equazione di secondo grado che, risolta, fornisce $\lambda = -4$, che si scarta, perchè negativa, e $\lambda = 3$, che è il valore cercato. Dunque, X e Y hanno distribuzione di Poisson di parametro 3. Si ha:

$$P\left(2 - XY \leq \frac{X^2 + Y^2}{2} < 8 - XY\right) = P\left(4 \leq X^2 + Y^2 + 2XY < 16\right)$$

$$= P(2 \leq X + Y < 4) = P(X + Y \in \{2,\ 3\}).$$

Siccome $X + Y \sim Poisson(3+3)$, la probabilità cercata vale

$$e^{-6}\left(6^2/2 + 6^3/6\right) = 36 \cdot \frac{3}{2} e^{-6} = 0.1338.$$

Esercizio 2 (i) Per $\alpha > 0$ la funzione $f_\alpha(x,y)$ è continua e positiva per $x, y > 0$. Calcolando l'integrale doppio di $f_\alpha(x,y)$ esteso a ${\mathbf{R}_+}^2$, si ottiene $\frac{5}{4}\alpha$; imponendo che tale valore sia uguale a 1, si ottiene $\bar{\alpha} = \frac{4}{5}$. Dunque, si ottiene la densità:

$$f_{\bar{\alpha}}(x,y) = \frac{4}{5}\left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right] \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

(ii) La densità marginale di X è:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{4}{5}\left[e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy + \frac{e^{-2x}}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{5}\left[e^{-x} + e^{-2x}/2\right] = \frac{4}{5}e^{-x}(1+e^{-x}/2), & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \end{aligned}$$

Visto che l'espressione di $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$ è simmetrica rispetto a x e y, si ottiene analogamente

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{5}e^{-y}(1+e^{-y}/2), & y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si ha:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{4}{5}\int_0^{+\infty}(xe^{-x} + \frac{x}{2}e^{-2x})dx = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{10}$$

(il calcolo è stato effettuato agevolmente, ricordando la formula per la media di una v.a. esponenziale di parametro λ). Naturalmente, si ottiene anche $E(Y) = E(X) = \frac{9}{10}$, visto che X e Y hanno la stessa distribuzione.

Si ha:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy\ xy\left(e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right)\right] \\ &= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx\ xe^{-x}\int_0^{+\infty} dy\ ye^{-y} + \int_0^{+\infty} dx\ xe^{-2x}\int_0^{+\infty} dy\ ye^{-2y}\right] \\ &= \frac{4}{5}\left(1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

(anche qui, abbiamo sfruttato la formula per la media di una v.a. esponenziale di parametro λ).

Quindi, otteniamo:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{19}{100} = 0.19 \neq 0,$$

per cui le v.a. X e Y non sono stocasticamente indipendenti; d'altra parte, ciò segue anche dal fatto che la densità congiunta di (X,Y) non è uguale al prodotto delle densità marginali.

(iii) La v.a. $Z = X + 2Y$ assume valori positivi; utilizziamo il metodo di cambiamento di variabili. Consideriamo la trasformazione

$$\psi : \begin{cases} x = x \\ z = x + 2y \end{cases} \qquad \psi^{-1} : \begin{cases} x = x \\ y = (z-x)/2 \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasormazione inversa è :

$$J_{\psi^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante uguale a 1/2. Quindi, si ottiene per la densità congiunta di (X, Z) :

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f_{(X,Y)}(x,(z-x)/2)\ \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\left[e^{-(x+(z-x)/2)} + e^{-2(x+(z-x)/2)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z)$$

$$= \frac{2}{5}\left[e^{-(x+z/2)} + e^{(x+z)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z).$$

Quindi, per $z > 0$ la densità di Z è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{2}{5}\left[e^{-(x+z/2)} + e^{(x+z)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z)$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^z dx\left(e^{-z/2}e^{-x/2} + e^{-z}e^{-x}\right) = \frac{2}{5}\left[e^{-z/2}\cdot 2(1-e^{-z/2}) + e^{-z}(1-e^{-z})\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2e^{-z/2} - e^{-z} - e^{-2z}\right],\ z > 0.$$

Inoltre:

$$P(Y \le 2X+1) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{2x+1} dy f_{\bar{\alpha}}(x,y)$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx e^{-x}\int_0^{2x+1} e^{-y}dy + \int_0^{+\infty} dx e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2x+1} 2e^{-2y}dy\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx e^{-x}\left(1-e^{-2x-1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dx e^{-2x}\left(1-e^{-4x-2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx\left(e^{-x} - e^{-3x}e^{-1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dx\left(e^{-2x} - e^{-6x}e^{-2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[1 - \frac{1}{3}e^{-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^{-2}\right)\right] = \frac{1}{15}(15 - 4e^{-1} - e^{-2}) \approx 0.8928$$

(iv) Si ha:

$$P(Y \le X | X > 1) = \frac{P(Y \le X,\ X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{\int\int_A f(x,y)dxdy}{\int_1^{+\infty} f_X(x)dx},$$

dove $f(x,y)$ è la densità di (X,Y), $f_X(x)$ è la densità di X e
$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 1,\ 0 < y < x\}$.
Il numeratore vale:

$$Num = \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy\left(e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx e^{-x}\int_0^x dy e^{-y} + \int_1^{+\infty} dx e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\int_0^x dy 2e^{-2y}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx e^{-x}(1-e^{-x}) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dx e^{-2x}(1-e^{-2x})\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dx(e^{-2x} - e^{-4x})\right]$$

$$= \frac{e^{-1}}{10}(8 - 2e^{-1} - e^{-2}) \approx 0.2654$$

Il denominatore vale:

$$Denom = \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} (e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x})dx\right] = \frac{e^{-1}}{5}(4 + e^{-1}).$$

Dunque, la probabilità cercata è:

$$\frac{Num}{Denom} = \frac{\frac{e^{-1}}{10}(8 - 2e^{-1} - e^{-2})}{\frac{e^{-1}}{5}(4 + e^{-1})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 - 2e^{-1} - e^{-3}}{4 + e^{-1}} \approx 0.8258\ .$$

Esercizio 3 Un intervallo I di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, la media campionaria è $\bar{x} = 231.8$, e $\sigma = 15.4$;

(i) se $1 - \alpha = 0.95$, allora $1 - \alpha/2 = 0.975$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per la temperatura media di fusione dello stagno, al livello 0.95 è:

$$I = \left[231.8 - \frac{15.4}{10} \cdot 1.96,\ 231.8 + \frac{15.4}{10} \cdot 1.96\right] = [228.7816,\ 234.8184]\ .$$

(ii) Si ha:

$$P\left(\overline{X}_{100} \le t\right) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100} \le t\right) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \le 100t)$$

$$= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 231.8}{15.4\sqrt{100}} \le \frac{100t - 100 \cdot 231.8}{15.4\sqrt{100}}\right)$$

che, per l'approssimazione normale vale circa

$$\Phi\left(\frac{100(t - 231.8)}{15.4\sqrt{100}}\right) = \Phi\left(\frac{10(t - 231.8)}{15.4}\right).$$

Quindi, per $t = 232$, si ottiene:

$$P(\overline{X}_{100} \le 232) \approx \Phi\left(\frac{10(232 - 231.8)}{15.4}\right) = \Phi(0.1298) \approx 0.59\ .$$