Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
I prova finale a.a. 2016/17

Punteggi: **1:** $3 + 6$; **2 :** $4 + 5 + 2 + 2$; **3:** $4 + 4$.

1. Una scatola contiene 100 monete; 80 di queste sono equilibrate, mentre le altre 20 danno testa con probabilità 3/4 e croce con probabilità 1/4.
(i) Una moneta viene scelta a caso e lanciata $n = 10$ volte. Qual è la probabilità di ottenere 7 volte testa? Qual è la probabilità che la moneta sia una di quelle equilibrate sapendo che in 10 lanci si è ottenuto 7 volte testa?
(ii) Selezioniamo ora una moneta equilibrata, M_1, ed una moneta non equilibrata, M_2, e lanciamo più volte e indipendentemente queste due monete; sia T il minimo numero di lanci necessario ad ottenere testa per la prima volta, lanciando la moneta M_1 ed S il minimo numero di lanci necessario ad ottenere testa per la prima volta, lanciando la moneta M_2.
Calcolare:
a) $P(S \geq T^2 | S \leq 2)$; b) $P(S \leq T)$; c) $P(\frac{5}{2}S = 10 - \frac{5}{2}T)$.

2. La v.a. Y ha legge $\Gamma(3/2, 1/2)$, mentre la densità condizionale di X dato $Y = y > 0$ è normale di media 0 e varianza $1/y$.
(i) Calcolare $E(\sqrt{Y})$ e $Var(\sqrt{Y})$.
(ii) Calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) e la densità marginale di X; le v.a. X e Y sono indipendenti?
(iii) La v.a. X ha speranza matematica finita? Nel caso, quanto vale $E(X)$?
(iv) Calcolare $P(XY \leq 0)$.

3. (i) I semiconduttori prodotti da una fabbrica risultano privi di difetti con probabilità $p = 0.973$. Dare un'approssimazione della probabilità che in un lotto di 1000 semiconduttori ve ne siano meno ($\leq$) di 970 senza difetti.
ii) Una nuova linea di produzione di semiconduttori viene messa in servizio e di essa si vuole valutare la proporzione q di quelli privi di difetti. In un lotto di 1000 pezzi prodotti se ne trovano 980 senza difetti. Qual è un intervallo di fiducia di livello $1 - \alpha = 0.95$ per la proporzione q?

Soluzioni della I prova finale a.a. 2016/17

1. (i) Consideriamo gli eventi "si è scelta una moneta equilibrata" (chiamiamolo E) e "si è scelta una moneta non equilibrata" (chiamiamolo N). Indichiamo poi con A l'evento "in 10 lanci si sono ottenute 7 teste". I dati del problema implicano che $P(E) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, P(N) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Se la moneta prescelta è equilibrata, allora la probabilità di ottenere 7 teste in 10 lanci è data dalla legge binomiale $B(10, 1/2)$; quindi la probabilità di avere 7 teste in 10 lanci per la moneta equilibrata è

$$\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Dunque

$$P(A|E) = \binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Se invece la moneta non è equilibrata, la probabilità di avere 7 teste in 10 lanci è data dalla legge binomiale $B(10, 3/4)$; pertanto, la probabilità di avere 7 teste in 10 lanci per la moneta non equilibrata è

$$\binom{10}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}.$$

Dunque

$$P(A|N) = \binom{10}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}.$$

(ii) Per la formula delle probabilità totali la probabilità di avere 7 teste in 10 lanci risulta essere

$$P(A) = P(E)P(A|E) + P(N)P(A|N) = \frac{4}{5}\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \frac{1}{5}\binom{10}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot 0.117 + \frac{1}{5}\cdot 0.25 = 0.094 + 0.05 = 0.144$$

Ora occorre calcolare $P(E|A)$; per la formula di Bayes:

$$P(E|A) = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A)} = \frac{\binom{10}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{4}{5}}{0.144}$$

$$= \frac{0.94}{0.144} = 0.65\ .$$

(iii) T ha distribuzione geometrica modificata di parametro $1/2$, mentre T ha distribuzione geometrica modificata di parametro $3/4$. Inoltre S e T sono indipendenti.
a) Si ha:

$$P(S \geq T^2, S \leq 2) = P(\{T = 1, S = 1\} \cup \{T = 1, S = 2\})$$

$$= P(T=1)P(S=1) + P(T=1)P(S=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16} = \frac{15}{32}\ .$$

Quindi:

$$P(S \geq T^2 | S \leq 2) = P(S \geq T^2, S \leq 2)/P(S \leq 2) = (15/32)/(15/16) = 1/2.$$

b)
$$P(S > T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S > k, T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S > k)P(T = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 3/4)^k \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{1-1/8} - 1 = \frac{1}{7}\ .$$

Quindi $P(S \leq T) = 1 - P(S > T) = 6/7$.
c) L'evento $\{\frac{5}{2}S = 10 - \frac{5}{2}T\}$ non è altro che l'evento $\{S + T = 4\}$; pertanto la probabilità cercata è:

$$P(S + T = 4) = P(S = 1, T = 3) + P(S = 3, T = 1) + P(S = 2, T = 2)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{3}{8\cdot 16} + \frac{3}{16\cdot 4} = \frac{21}{16\cdot 8} = 0.1640625\ .$$

2. (i) La densità di Y è, per $y > 0$:

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{3/2}}{\Gamma(3/2)} y^{1/2} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{1/2} e^{-y/2}$$

(ricordare che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, per cui $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$), mentre è zero per $y \leq 0$. Dunque

$$E(\sqrt{Y}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{y} f_Y(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y e^{-y/2} dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} y \frac{1}{2} e^{-y/2} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y \frac{1}{2} e^{-y/2} dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2,$$

essendo l'integrale uguale alla media di una v.a esponenziale di parametro $1/2$, che vale 2. Il momento del second'ordine è ancora più facile da calcolare, ricordando il valore della media delle leggi Gamma:

$$E((\sqrt{Y})^2) = E(Y) = 3.$$

Pertanto, $Var(\sqrt{Y}) = E((\sqrt{Y})^2) - E^2(\sqrt{Y}) = 3 - 8/\pi$.
(ii) Siccome

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{y}e^{-x^2y/2},$$

la densità congiunta di (X, Y) è per $x \in (-\infty, +\infty)$ e $y > 0$:

$$f(x, y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}ye^{-y(1+x^2)/2}.$$

La densità marginale di X è:

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} ye^{-y(1+x^2)/2}dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(2)}{((1+x^2)/2)^2}\int_0^{+\infty}\frac{((1+x^2)/2)^2}{\Gamma(2)}y^{2-1}e^{-y(1+x^2)/2}dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2},$$

poiché la funzione integranda è una densità Gamma di parametri 2 e $(1+x^2)/2$ e quindi l'integrale vale 1.
Ovviamente, le v.a. X e Y non sono indipendenti.
(iii) Siccome $|x|f_X(x) \sim 1/x^3$ per $x \to \infty$, risulta che $E(X)$ è finita; anzi, visto che $f_X(x)$ è una funzione pari, si ha $E(X) = 0$.
(iv) Siccome $Y > 0$, si ha $P(XY \leq 0) = P(X \leq 0) = 1/2$, sempre per la parità di $f_X(x)$.

3.
(i) Il numero, X, di semiconduttori senza difetti nel lotto di 1000 pezzi segue una legge binomiale $B(1000, 0.973)$. Applicando l'approssimazione normale con la correzione di continuità, otteniamo:

$$P(X \leq 970) = P(X \leq 970.5)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{970.5 - 1000 \cdot 0.973}{\sqrt{0.973 \cdot 0.027}\sqrt{1000}}\right) = \Phi(-0.487)$$

$$= 1 - \Phi(0.487) = 1 - 0.687 = 0.313.$$

Il risultato esatto, disponendo della funzione di ripartizione della binomiale $B(1000, 0.973)$ è 0.305.

(ii) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \tag{$*$}$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria, e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 1000$, $\bar{x} = 0.98$, mentre σ è incognita; considerando che il campione proviene da una sequenza di v.a. di Bernoulli, la cui varianza σ^2 è $\leq 1/4$, possiamo maggiorare σ con $1/2$. Da $1-\alpha = 0.95$ segue $1-\alpha/2 = 0.975$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Sostituendo in $(*)$ $\bar{x} = 0.98$, $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ e $\sigma = 1/2$ si ottiene l'intervallo $I = [0.95,\ 1.01]$.