Esercizi su integrale stocastico

1. Sia B_t un MB. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il processo $Z_t = \int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s$ è definito? Per quali valori è una martingala di quadrato integrabile?

2. Calcolare:
(i) $E\left((\int_0^t B_s dB_s)^2\right)$
(ii) $E\left(B_s \int_0^t B_u dB_u\right)$
(iii) $E\left((\int_0^t B_s dB_s)(\int_0^t g(s) dB_s)\right)$
(iv) $E\left(B_1 \int_0^t B_u^2 dB_u\right)$

3. (i) Quanto vale $E\left[B_s^2 \left(\int_s^t B_u dB_u\right)^2\right]$?
(ii) Mostrare che, se $X \in M^2([s,t])$, la v.a. $Z = \int_s^t X_u dB_u$ è scorrelata con la v.a. $B_v, v \leq s$, ma, in generale, non è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

4. Sia B_t un MB e $\lambda > 0$; siano:

$$Y_t = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s, \ Z_t = \int_0^t e^{-\lambda s} dB_s$$

(i) mostrare che $\forall t > 0$ Y_t e Z_t hanno la stessa legge e determinarla;
(ii) mostrare che Z_t è una martingala, mentre invece Y_t non lo è.

5. Mostrare che $\int_0^t B_u^2 du$ è ortogonale in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a tutte le v.a. della forma $\int_0^s f(u) dB_u$, al variare di $s > 0$ e di $f \in L^2((0,s))$.

6. Se B_t è un MB e $f(s)$ una funzione deterministica in $L^2((0,t))$, calcolare:

$$E\left(B_t \int_0^t f(s) dB_s\right)$$

Soluzioni degli esercizi su integrale stocastico

1. Affinché l'integrale stocastico $\int_0^t s^a e^{bB_s} dB_s$ sia definito occorre che l'integrando sia nello spazio $\Lambda^2([0,t])$, cioè che:

$$\int_0^t s^{2a} e^{2bB_s} ds < +\infty \quad q.c.$$

Poiché il processo $e^{2bB_s} > 0$ è continuo e non ha singolarità in $[0,t]$, la condizione precedente si riduce a richiedere che la funzione $s \longrightarrow s^{2a}$ sia integrabile in $[0,t]$, cioè che $a > -1/2$. Se questa condizione è soddisfatta, allora Z_t è una martingala di quadrato integrabile se l'integrando $\in M^2([0,t])$, ovvero se

$$\int_0^t s^{2a} E(e^{2bB_s}) ds < +\infty$$

Ma, poiché (ricordando la trasformata di Laplace di B_t) risulta $E(e^{2bB_s}) = e^{\frac{1}{2}(2b)^2 s} = e^{2b^2 s}$, la condizione di sopra è verificata, non appena $a > -1/2$.

2. Ricordiamo che, se il processo $X \in M^2([a,b])$, allora:

$$E\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2\right] = E\Big[\int_a^b X_t^2 dt\Big] \tag{1}$$

$$E\left(\int_a^b X_t dB_t \Big| \mathcal{F}_a\right) = 0 \tag{2}$$

$$E\left[\left(\int_a^b X_t dB_t\right)^2 \Big| \mathcal{F}_a\right] = E\left[\int_a^b X_t^2 dt \Big| \mathcal{F}_a\right] \tag{3}$$

Applicando (1) a $X+Y$ e $X-Y$ e sottraendo, si ottiene anche:

$$E\left(\int_a^b X_t dB_t \cdot \int_a^b Y_t dB_t\right) = \int_a^b E(X_t Y_t) dt \tag{4}$$

Inoltre, vale la seguente:
Proposizione. *Siano $X \in M^2([0,T])$ e τ_1, τ_2 tempi di arresto tali che $\tau_1 \leq \tau_2 \leq T$. Allora:*

$$E\left(\int_0^{\tau_1} X_t dB_t\right) = 0 \tag{5}$$

$$(6) \qquad E\left[\left(\int_0^{\tau_1} X_t dB_t\right)^2\right] = E\left(\int_0^{\tau_1} X_t^2 dt\right)$$

$$(7) \qquad E\left[\left(\int_0^{\tau_2} X_t dB_t\right) \Big| \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = \int_0^{\tau_1} X_t dB_t \ q.c.$$

$$(8) \qquad E\left[\left[\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} X_t dB_t\right)^2 \Big| \mathcal{F}_{\tau_1}\right] = E\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} X_t^2 dt\right) \Big| \mathcal{F}_{\tau_1}\right] \ q.c.$$

(i) Si ha, per la (1):

$$E\left[\left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2\right] = E\Big[\int_0^t B_s^2 ds\Big] = \int_0^t E(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2} \ .$$

(ii) Si ha, se $s < t$:

$$E\left(B_s \int_0^t B_u dB_u\right) = E\left(\int_0^s \mathbf{1}_{[0,s]}(t) dB_t \cdot \int_0^t B_u dB_u\right) =$$

$$= E\left(\int_0^t \mathbf{1}_{[0,s]}(u) dB_u \cdot \int_0^t B_u dB_u\right) =$$

(per la (4))

$$= \int_0^t E(\mathbf{1}_{[0,s]}(u) B_u) du = 0$$

(iii) Si ha:

$$E\left[\left(\int_0^t B_s dB_s\right)\left(\int_0^t g(s) dB_s\right)\right] = E\left(\int_0^t (B_s g(s)) ds\right) = \int_0^t E(B_s) g(s)) ds = 0$$

(iv) Intanto si può scrivere

$$B_1 = \int_0^1 dB_u = \int_0^t dB_u + \int_t^1 dB_u$$

Allora, se $t < 1$:

$$E\left(B_1 \int_0^t B_u^2 dB_u\right) = E\left(\left(\int_0^t dB_u + \int_t^1 dB_u\right) \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) =$$

$$= E\left(\int_0^t dB_u \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) + E\left(\int_t^1 dB_u \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) = I_1 + I_2$$

Ora:

$$I_1 = \text{ (per la (4))} = E\int_0^t (1\cdot B_u^2)du = \int_0^t E(B_u^2)du = \int_0^t udu = \frac{1}{2}t^2$$

$$I_2 = E\left(\int_0^1 \mathbf{1}_{(t,1)}(u)dB_u \cdot \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,t)}(u)B_u^2 dB_u\right) =$$

(sempre per la (4))

$$= E\int_0^1 (\mathbf{1}_{(t,1)}(u)\cdot \mathbf{1}_{(0,t)}(u)B_u^2)du = 0,$$

essendo $(t,1)\cap(0,t)=\emptyset$. Pertanto, per $t<1$ si ottiene $E\left(B_1\int_0^t B_u^2 dB_u\right) = \frac{1}{2}t^2$.
Se $t\geq 1$:

$$E\left(\int_0^1 dB_u \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) = E\left(\int_0^t \mathbf{1}_{(0,1)}(u)dB_u \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) =$$

(per la (4))

$$= E\left(\int_0^t (\mathbf{1}_{(0,1)}(u)B_u^2)du\right) = \int_0^1 E(B_u^2)du = \int_0^1 udu = \frac{1}{2}$$

Concludendo:

$$E\left(\int_0^1 dB_u \cdot \int_0^t B_u^2 dB_u\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{se } t<1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t\geq 1 \end{cases}$$

3. (i)

$$E\left[B_s^2\left(\int_s^t B_u dB_u\right)^2\right] = E\left[E\left[B_s^2\left(\int_s^t B_u dB_u\right)^2\right]\Big|\mathcal{F}_s\right] =$$

$$= E\left[B_s^2 E\left(\int_s^t B_u dB_u\right)^2 \Big|\mathcal{F}_s\right]$$

(per la (3) - v. esercizio precedente)

$$= E\left[B_s^2 E\left(\int_s^t B_u^2 du\Big|\mathcal{F}_s\right)\right] =$$

(poiché $\int_s^t B_u^2 du$ è $\mathcal{F}_s-$misurabile)

$$= E\left[B_s^2 \int_s^t B_u^2 du\right] = \int_s^t E(B_s^2 B_u^2)du$$

Ricordiamo che (v. Esercizio 5 sulle martingale):

$$E(B_s^2B_u^2) = 3s^2 + (u-s)s$$

Quindi, riprendendo il calcolo:

$$E\left[B_s^2\left(\int_s^t B_u dB_u\right)^2\right] = \int_s^t (3s^2 + s(u-s))du = \frac{1}{2}s(t-s)^2 + 3s^2(t-s)$$

(ii) Si può scrivere: $Z = \int_0^t \tilde{X}_u dB_u$, ove

$$\tilde{X}_u = \begin{cases} X_u & \text{se } s \le u < t \\ 0 & \text{se } 0 \le u < s < t \end{cases}$$

Siccome $B_v = \int_0^t \mathbf{1}_{(0,v)}(u)dB_u$, per $v \le s < t$ si ha:

$$E(ZB_v) = E\left(\int_0^t \tilde{X}_u dB_u \cdot \int_0^t \mathbf{1}_{(0,v)}(u)dB_u\right) =$$

(per la (4) - v. esercizio precedente)

$$= E\left(\int_0^t \tilde{X}_u \mathbf{1}_{(0,v)}(u)du\right) =$$

(visto che $\tilde{X}_u \mathbf{1}_{(0,v)}(u) = 0$ per $v \le s$)

$$= E\left(\int_0^t 0 \cdot du\right) = 0 = E(Z)E(B_v)$$

e dunque Z e B_v sono scorrelate.
(ii) Per mostrare che Z è **dipendente** da $\mathcal{F}_s$ cerchiamo un controesempio. Prendiamo $X_u = B_u$ e poniamo $W = Z = \int_s^t B_u dB_u$; se W fosse indipendente da $\mathcal{F}_s$, in particolare W^2 e B_s^2 sarebbero scorrelate e quindi dovrebbe essere $E(B_s^2 W^2) = E(B_s^2)E(W^2)$. Invece:

$$E(B_s^2) = s,\ E(W^2) = E\left(\int_s^t B_u^2 du\right) = \int_s^t E(B_u^2)du = \int_s^t u du = \frac{1}{2}(t^2 - s^2)$$

Calcolando il prodotto $E(B_s^2)E(W^2)$, viene diverso da $E(B_s^2 W^2) = \frac{1}{2}s(t-s)^2 + 3s^2(t-s)$, calcolato al punto (i). Pertanto, W e B_s^2 sono correlate, quindi dipendenti, dunque W è dipendente da $\mathcal{F}_s$.

4. Richiamiamo la seguente:
Proposizione. *Se $f \in L^2([0,T])$ è una funzione deterministica, allora il processo*

$$I(t) = \int_0^t f(s)dB_s$$

è Gaussiano.

(i) Per la proposizione di sopra Y_t e Z_t sono entrambi processi Gaussiani, ed hanno evidentemente media zero. Calcoliamo le varianze; si ha:

$$Var(Y_t) = E\left[\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s\right)^2\right] = \int_0^t \left(e^{-\lambda(t-s)}\right)^2 ds = \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} ds =$$

$$= \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})$$

$$Var(Z_t) = E\left[\left(\int_0^t e^{-\lambda s} dB_s\right)^2\right] = \int_0^t e^{-2\lambda s} ds = \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t}) = Var(Y_t)$$

Quindi, per $t \geq 0$ fissato, Y_t e Z_t hanno entrambe legge normale $\mathcal{N}(0, \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda})$.
(ii) Per le proprietà dell'integrale stocastico Z_t è una martingala, mentre invece, se $s \leq t$, si ha:

$$E[Y_t|\mathcal{F}_s] = e^{-\lambda t} E\left[\int_0^t e^{\lambda u} dB_u \Big| \mathcal{F}_s\right] =$$

(per la (7) della Proposizione richiamata nell'Esercizio 2)

$$= e^{-\lambda t} \int_0^s e^{\lambda u} dB_u = e^{-\lambda(t-s)} Y_s$$

e quindi Y_t non è una martingala.

5. Supponiamo dapprima che $f = \mathbf{1}_{(0,s)}$; allora $\int_0^s f(u) dB_u = B_s$.
(i) Se $s \geq t$:

$$E\left(B_s \int_0^t B_u^2 du\right) = \int_0^t E(B_s B_u^2) du = \int_0^t E[(B_s - B_u) B_u^2] du + \int_0^t E(B_u^3) du =$$

(visto che $\int_0^t E(B_u^3) du = 0$ e per l'indipendenza degli incrementi)

$$= \int_0^t E(B_s - B_u) E(B_u^2) du = 0$$

(ii) Se $s < t$:

$$E\left(B_s \int_0^t B_u^2 du\right) = \int_0^t E(B_s B_u^2) du = \int_0^s E(B_s B_u^2) du + \int_s^t E(B_s B_u^2) du = I_1 + I_2$$

Ma $I_1 = 0$ per (i); per quanto riguarda l'integrando di I_2, si ha:

$$E(B_s B_u^2) = E(B_s (B_u - B_s)^2) + 2E(B_s^2 (B_u - B_s)) + E(B_s^3) =$$

(per l'indipendenza degli incrementi)

$$= E(B_s)E((B_u - B_s)^2) + 2E(B_s^2)E(B_u - B_s) + E(B_s^3) = 0$$

In conclusione, sia per $s \geq t$ che per $s < t$, il prodotto scalare in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tra $f = \mathbf{1}_{(0,s)}$ e $\int_0^t B_u^2 du$ è zero, ovvero sono ortogonali. La stessa cosa vale allora se f è una funzione semplice, cioé combinazione lineare di funzioni indicatrici, e quindi, per densità, se $f \in L^2(0, s)$.

6. Si ha:

$$E\left(B_t \int_0^t f(s)dB_s\right) = E\left(\int_0^t dB_s \cdot \int_0^t f(s)dB_s\right) =$$

(per la (4) dell'Esercizio 2)

$$= \int_0^t E(1 \cdot f(s))ds = \int_0^t f(s)ds.$$