Integrazione sul processo telegrafico casuale

Esso è definito da

$$X(t) = X_0(-1)^{N_t}$$

dove N_t un processo di Poisson omogeneo di parametro $\lambda > 0$, con $N_0 = 0$; inoltre X_0 è indipendente da N_t e $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.

Abbiamo già visto che $X(t)$ è un processo stocastico debolmente stazionario, con $E[X(t)] = 0$, $Var[X(t)] = 1$, mentre la covarianza, se $s < t$, è $R(s,t) = e^{-2\lambda(t-s)}$.
Ora faremo vedere che $X(t)$ è stazionario anche in senso stretto. In particolare, faremo vedere che $X(t)$ è una CM a tempo continuo, con spazio degli stati $E = \{-1, 1\}$.

Se $i, j \in E$, calcoliamo le probabilità di transizione al tempo τ :

$$p_{ij}(\tau) = P[X(t+\tau) = j | X(t) = i].$$

Come è evidente dai precedenti ragionamenti, si ha che la probabilità di NON cambiare stato nell'intervallo di ampiezza τ, ovvero che $X(t+\tau) = X(t)$, non è altro che
$P[N_{t+\tau} - N_t \text{ e' pari}] = P[N_\tau \text{ e' pari}]$, che abbiamo visto valere $\frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda\tau}\right)$.
Dunque:

$$p_{-1,-1}(\tau) = p_{1,1}(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda\tau}\right).$$

Invece, la probabilità di CAMBIARE stato nell'intervallo di ampiezza τ, ovvero che $X(t+\tau) \neq X(t)$, non è altro che
$P[N_{t+\tau} - N_t \text{ e' dispari}] = P[N_\tau \text{ e' dispari}]$, che abbiamo visto valere $\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right)$.
Dunque:

$$p_{-1,1}(\tau) = p_{1,-1}(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right).$$

Pertanto, la matrice $P(\tau)$ delle probabilità di transizione è:

$$P(\tau) = \begin{pmatrix} p_{-1,-1}(\tau) & p_{-1,1}(\tau) \\ p_{1,-1}(\tau) & p_{1,1}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda\tau}\right) & \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda\tau}\right) & \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\lambda\tau}\right) \end{pmatrix}.$$

Il generatore è $Q = P'(0)$; facendo i calcoli, si ottiene:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix},$$

che concorda col fatto che i tempi di permanenza negli stati sono v.a. esponenziali di parametro λ.

Per $\tau \to +\infty$:

$$P(\tau) \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

quindi esiste la distribuzione stazionaria $\pi = (1/2, 1/2)$ della CM (naturalmente, essa è anche invariante, poiché si verifica facilmente che $\pi P(\tau) = \pi$).

Concludiamo che il processo telegrafico casuale $X(t)$ è una CM omogenea a tempo continuo, stazionaria.

Inoltre, da quanto visto in precedenza, si ha che:

$$P[X(t) = 1] = P[X(t) = -1] = 1/2 \ \ \forall t,$$

per cui, per ogni s e t risulta $X(t) \sim Uni(1/2, 1/2)$, come pure $X(s) \sim Uni(1/2, 1/2)$, ovvero la distribuzione di $X(t)$ è invariante per traslazioni temporali.

Ora, per l'omogeneità temporale della CM:

$$P[X(t_2) = j | X(t_1) = i] = P[X(t_2 - t_1) = j | X(0) = i],$$

e quindi:

$$P[X(t_2) = j, X(t_1) = i] = P[X(t_2 - t_1) = j | X(0) = i] P[X(t_1) = i].$$

Ma $P[X(t_1) = i] = cost. = 1/2, \; i \in -1, 1$.
Dunque:

$$P[X(t_2) = j, X(t_1) = i] = \frac{1}{2} \; P[X(t_2 - t_1) = j | X(0) = i].$$

Analogamente:

$$P[X(t_2 + \tau) = j, X(t_1 + \tau) = i] = \frac{1}{2} \; P[X(t_2 + \tau - t_1 - \tau) = j | X(0) = i] =$$

$$= \frac{1}{2} \; P[X(t_2 - t_1) = j | X(0) = i].$$

Quindi:

$$P[X(t_2 + \tau) = j, X(t_1 + \tau) = i] = P[X(t_2) = j, X(t_1) = i],$$

che implica che la distribuzione bidimensionale congiunta di $(X(t_1), X(t_2))$ è invariante per traslazioni temporali.
Similmente, si mostra che la distribuzione n-dimensionale del processo è invariante per traslazioni temporali.

Si può affermare in definitiva che il processo telegrafico casuale è fortemente stazionario, ed è una CM omogenea a tempo continuo, stazionaria.