# Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica A.A. 2019/20

## Processi stocastici e analisi di serie temporali

## Prova scritta del 20-02-20

Punteggi: **1.** $5 \times 2$; **2.** $5 \times 2$; **3.** $4 \times 2.5$ . Totale = 30.
Tempo a disposizione: 2.5 ore

**Esercizio 1.** Si consideri la catena di Markov $X_k$ a tempo discreto, omogenea, con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, avente la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

i)Tracciare il grafo associato alla CM e classificarne gli stati.
ii) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i della CM.
Esiste una distribuzione invariante $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ tale che $\pi_2 = 1/4$? In caso affermativo, calcolarla.
iii) Dire se esiste la distribuzione stazionaria e, in caso affermativo, stimare la velocità di convergenza all'equilibrio.
iv) Calcolare la probabilità di asorbimento in 1, partendo dallo stato 5.
v) Calcolare la probabilità di partire dallo stato 2 e tornare in 2 con 4 passi.

**Esercizio 2.** Ad una biglietteria con una sola cassa arrivano in media 3 clienti in un'ora. Il tempo medio di servizio è di 5 minuti. Si assume che i tempi tra arrivi consecutivi ed i tempi di servizio abbiano legge esponenziale.
a) Calcolare la probabilità che il tempo che intercorre tra un arrivo e l'altro sia minore di 10 minuti.
b) Calcolare la probabilità che non ci sia nessuno a comprare un biglietto, in regime stazionario.
c) Calcolare quanti clienti ci sono, in media, nel sistema e nella fila, in regime stazionario.
d) Calcolare, in regime stazionario, la probabilità che il tempo di attesa nel sistema, misurato in minuti, sia maggiore di 20/3 e trovare il tempo medio di attesa nel sistema e nella fila.
e) Nel caso in cui venga aperta una seconda cassa (con lo stesso tempo medio di servizio), calcolare la probabilità che la biglietteria sia vuota, in regime stazionario.

**Esercizio 3.** Si consideri la CM $X(t)$ a tempo continuo, omogenea con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$, ed avente per generatore la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & 1/4 & \alpha/2 \\ 0 & -\beta & \beta \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

a) Trovare $\alpha$ e $\beta$, sapendo che, detto $R_2$ il tempo di permanenza nello stato 2, risulta $P(R_2 \leq 4\ln(2)) = 1/2$.
b) Calcolare approssimativamente $P(0.01)$; la matrice $P(0.01)$ ha elementi tutti positivi? è regolare?
c) Trovare la distribuzione stazionaria $\pi$ di $X$, se esiste, giustificando la risposta.
d) Si consideri ora la CM $\widehat{X}_n$ a tempo discreto, accelerata, ottenuta da $X(t)$ trascurando i tempi di permanenza negli stati; trovarne la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$, se esiste, e confrontarla con $\pi$. Inoltre, calcolare $P(X_\infty < e)/P(\hat{X}_\infty < \sqrt{5})$.

**Processi stocastici e analisi di serie temporali a.a. 2019/20**
**Soluzioni della prova di scritta del 20-02-20**

**1.** (i) Lo stato 1 è assorbente; $\{2, 3\}$ è una classe chiusa di stati ricorrenti che comunicano tra loro; 4 e 5 sono stati transitori.
(ii) Le distribuzioni invarianti $\pi$ si trovano risolvendo l'equazione vettoriale $\pi P = \pi$; il sistema fornisce infinite soluzioni della forma $\pi = (1 - 4\mu, \mu, 3\mu, 0, 0)$ con $\mu \in [0, 1/4]$. Se vogliamo che $\pi_2 = 1/4$, deve essere $\mu = 1/4$, ottenendosi $\pi = (0, 1/4, 3/4, 0, 0)$.
(iii) Esistendo infinite distribuzioni invarianti, non può esistere la distribuzione stazionaria.
(iv) La probabilità di essere assorbiti in 1 partendo da uno stato transitorio $i \in T$ è definita da:

$$\lambda_i = P(\exists n \geq 1 : X_n = 1 | X_0 = i)$$

ed è soluzione dell'equazione:

$$\lambda_i = \sum_{h \in C} p_{ih} + \sum_{j \in T} p_{ij} \lambda_j, \ i \in T$$

dove $C = \{1\}$ e $T$ è l'insieme degli stati transitori. Cerchiamo $\lambda_4$ e $\lambda_5$; occorre quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \lambda_4 = p_{41} + p_{44}\lambda_4 + p_{45}\lambda_5 \\ \lambda_5 = p_{51} + p_{54}\lambda_4 + p_{55}\lambda_5 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda_5 \\ \lambda_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_4 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\lambda_4 = 3/5, \ \lambda_5 = 4/5$.
(v) Considerando che gli stati 2 e 3 formano una classe chiusa di stati ricorrenti che comunicano tra loro, con $p_{22} = 0$, si ha:

$$p_{22}^{(4)} = p_{23}p_{32}p_{23}p_{32} + p_{23}p_{33}p_{33}p_{32} = (1/3)^2 + (1/3)(2/3)^2 = 0.2592593 \ .$$

Allo stesso risultato, si può pervenire, calcolando

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3333333 & 0.6666667 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2222222 & 0.7777778 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.1111111 & 0.2222222 & 0.1666667 & 0 \\ 0.6666667 & 0 & 0.1666667 & 0 & 0.1666667 \end{pmatrix}$$

e poi

$$P^4 = (P^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2592593 & 0.7407407 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2469136 & 0.7530864 & 0 & 0 \\ 0.5833333 & 0.1049383 & 0.2839506 & 0.0277778 & 0 \\ 0.7777778 & 0.0370370 & 0.1574074 & 0 & 0.0277778 \end{pmatrix}$$

**2.** Si tratta di una coda $M/M/1$ con $\lambda = 3/60 = 1/20$ e $\mu = 1/5$ (l'unità di misura è il minuto); quindi $\rho = \lambda/\mu = 1/4$.
a) Il tempo $T$ che intercorre tra due arrivi consecutivi ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda$, pertanto $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, dunque

$$P(T \leq 10) = 1 - e^{-\frac{1}{20} \cdot 10} = 1 - e^{-1/2} = 0.3934693 \ .$$

b) La distribuzione stazionaria è geometrica di parametro $\rho = 1/4 < 1$, quindi esiste la distribuzione stazionaria $\pi$ e $\pi_k = (1 - \rho)\rho^k = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ da cui $\pi_0 = \frac{3}{4}$ .
c)+d) Il numero medio di clienti è $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 1/3$. Il tempo di attesa $T_{attesa}$ di un cliente nel sistema ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu - \lambda = 3/20$, pertanto $P(T_{attesa} > 20/3) = \exp(-\frac{3}{20} \cdot \frac{20}{3}) =$

$e^{-1} = 0.3678794$; inoltre $W = E(T_{attesa}) = 1/(\mu - \lambda) = 20/3 = 6.6667$ (minuti). Il tempo medio di attesa nella fila è $W_c = W - 1/\mu = \frac{20}{3} - 5 = 5/3 = 1.6667$ (minuti) ed infine, il numero medio di clienti in fila è $L_c = \lambda W_c = \frac{1}{20} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{12} = 0.0833$ (clienti).
e) Per una coda M/M/2, risulta

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^3}{2(2-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{(1/4)^3}{2(2-1/4)}\right]^{-1} = \left[\frac{41}{32} + \frac{1}{32 \cdot 7}\right]^{-1} =$$

$$= (288/224)^{-1} = 0.7777778$$

**3.** (a) Evidentemente, deve aversi $-\alpha/2 + 1/4 = 0$, da cui $\alpha = 1/2$. Inoltre, visto che $R_2$ ha distribuzione esponenziale di parametro $\beta$, deve aversi $P(R_2 > t) = e^{-\beta t}$; quindi da $P(R_2 > 4\ln(2)) = 1/2$ si ricava $e^{-\beta \cdot 4\ln(2)} = 1/2$, ovvero $-4\beta\ln(2) = -\ln(2)$, da cui $\beta = 1/4$. Pertanto:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

b)+ c) Gli autovalori di $Q$ sono: $0$, $-0.5$ e $-0.9166$ . Gli autovalori non nulli hanno parte reale negativa (in realtà sono reali e negativi), il che implica che gli autovalori di $P(t)$, diversi da 1, ovvero $\lambda_2 = e^{-0.5t}$, $\lambda_3 = e^{-0.9166t}$, sono minori di 1; quindi, essendo $P(t)$ non degenere (il suo determinante è $e^{t \cdot TrQ} > 0$), $P(t)$ è regolare e la distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ esiste, ed è soluzione di:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo, si trova $\pi = (2/11, 6/11, 3/11) \cong (0.18, 0.54, 0.27)$. Si ha poi:

$$P(h) = Id + hQ + o(h) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} + o(h) =$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1-h/2 & h/4 & h/4 \\ 0 & 1-h/4 & h/4 \\ h/3 & h/3 & 1-2h/3 \end{pmatrix},$$

per $h$ piccolo.
Quindi:

$$P(0.01) \approx \begin{pmatrix} 0.995 & 0.0025 & 0.0025 \\ 0 & 0.9975 & 0.0025 \\ 0.0033333 & 0.0033333 & 0.9933333 \end{pmatrix}$$

Si ha $P(0.01)_{21} = 0$, per cui $P(0.01)$ non ha tutti gli elementi positivi; però, come si vede facilmente, $P(0.01)^2 > 0$, ovvero $P(0.01)$ è regolare.
d) La CM (a tempo discreto) "accelerata", ottenuta trascurando i tempi di permanenza nei vari stati, è descritta dalla matrice di transizione

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $\hat{P}$ è regolare ($P^4 > 0$), pertanto esiste la distribuzione stazionaria (ed invariante) $\hat{\pi}$ per la CM "accelerata", soluzione di $\hat{\pi} = \hat{\pi}\hat{P}$. Effettuando i calcoli, si trova:

$$\hat{\pi} = \left(\frac{4}{18}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right) \neq \pi$$

Infine:

$$\frac{P(X_\infty < e)}{P(\hat{X}_\infty < \sqrt{5})} = \frac{\pi_1 + \pi_2}{\hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2} = \frac{72}{55} \approx 1.31 \ .$$