Facoltà di Ingegneria
Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova scritta - 14 Luglio 2025
A.A. 2024-2025

Durata della prova 2.5 h
Punteggi: 1) $3+3+3+3$; **2)** $4+4+4$; **3)** $3+3$.

Totale = 30.

1. Due monete, M_1 e M_2, hanno, rispettivamente, probabilità p e q di dare Testa in ogni lancio. Si sceglie a caso una delle due monete e si lancia la moneta scelta finché si ottiene la prima Croce. Sia T il numero di lanci necessari.
(i) Determinare la densità discreta di T.
(ii) Calcolare $E(T)$, per p e q generici.
(iii) Se $p = q/2$, trovare p e q in modo che risulti $E(T) = 5/3$.
(iv) Trovare una condizione sufficiente per p e q che renda T una v.a. con legge geometrica modificata. In tal caso, se $p = q = 1/3$, sia θ il parametro della distribuzione di T. Se T ed S sono v.a. indipendenti, ed hanno distribuzione geometrica modificata di parametri θ e $\mu = 1/4$, rispettivamente, qual è la densità discreta di $W = \min(T, S)$? Quanto vale $E(W)$?

2. La densità di una variabile aleatoria bivariata continua (X, Y) con supporto nel triangolo $\Delta = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 2\}$ è data da $f(x, y) = kxy$.
(i) Determinare il valore della costante k.
(ii) Trovare le densità marginali di X e Y e calcolare $cov(X, Y)$; le v.a. X e Y sono indipendenti?
(iii) Se $U = X + Y$ e $V = X - Y$, trovare la densità del vettore aleatorio (U, V).

3. Si lancia n volte una moneta che dà "croce" con probabilità θ; indichiamo con N_n il numero di volte che è uscita "croce".
(i) Se $\theta = 0.5$ e $n = 100$, stimare $P(40 < N_n < 60)$;
(ii) Se $\theta = 0.25$ stimare il numero minimo di lanci affinché

$$P\left(0.20 < \frac{N_n}{n} < 0.30\right) > 0.95.$$

Probabilità e Statistica, a.a. 2024-25

Soluzioni della seconda prova scritta - 14 Luglio 2025

1. (i) Si ha $T \in \{1, 2, \dots\}$ e, per $k = 1, 2, \cdots$:

$$P(T = k) = P(T = k|M_1)P(M_1) + P(T = k|M_2)P(M_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[P(T = k|M_1) + P(T = k|M_2)]$$

Evidentemente, poiché siamo interessati al primo istante in cui esce Croce, si ha:

$$P(T = k|M_1) = (1 - p)p_1^{k-1} \text{ e } P(T = k|M_2) = (1 - q)p_2^{k-1}$$

Dunque, sostituendo:

$$P(T = k) = \frac{1}{2}[(1 - p)p^{k-1} + (1 - q)q^{k-1}]$$

(ii) Ricordando che la media di una v.a. geometrica modificata di parametro α è $1/\alpha$, si trova

$$E(T) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - p} + \frac{1}{1 - q}\right].$$

(iii) Se $p = q/2$ abbiamo:

$$E(T) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - p} + \frac{1}{1 - q}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2 - 3p}{(1 - p)(1 - 2p)}\right]$$

Imponendo che $E(T)$ sia uguale a $5/3$, si ottiene un' equazione di II grado in p; risolvendola si trova $p = 1/4$, oppure $p = 4/5$ e, corrispondentemente, $q = 1/2$, oppure $q = 8/5$, che si scarta, essendo > 1. Pertanto, l'unica soluzione possibile è $p = 1/4,\ q = 1/2$.
(iv) E' facile vedere che una condizione sufficiente affinché T sia una v.a. geometrica modificata di parametro θ è che risulti $1 - p = 1 - q = \theta$. Se $p = q = 1/3$, allora $\theta = 2/3$. Ricordando che la distribuzione del minimo di due v.a. geometriche modificate indipendenti, di parametri $\theta = 2/3$ e $\mu = 1/4$ è ancora geometrica modificata di parametro $\phi = \theta + \mu - \theta\mu$, si ottiene che W ha distribuzione geometrica modificata di parametro $\phi = 1/4$. Quindi $E(W) = 4$.

2. (i) Si ha:

$$\int\int_\Delta f(x, y)dxdy = k\int_0^2 xdx\int_0^x ydy = \frac{k}{2}\int_0^2 x^3dx = 2k,$$

per cui deve essere $k = \frac{1}{2}$.
(ii) Per $0 < x < 2$ si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \frac{x}{2}\int_0^x ydy = \frac{x^3}{4}.$$

Per $0 < x < 2$ si ha:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \frac{y}{2}\int_y^2 xdx = \frac{1}{4}y(4 - y^2).$$

Inoltre:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^2 \frac{x^4}{4}dx = \frac{8}{5}.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{1}{4} y^2 (4 - y^2) dy = \frac{16}{15}.$$

Infine:

$$E(XY) = \int\int_\Delta xy f(x,y) dx dy = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx \int_0^x y^2 dy = \frac{1}{6} \int_0^2 x^5 dx = \frac{16}{9},$$

da cui

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{16}{9} - \frac{8}{5} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{225}.$$

Pertanto, X e Y non sono indipendenti.
(iii) Si ha

$$U = X + Y, \ V = X - Y$$

e

$$X = (U + V)/2, \ Y = (U - V)/2.$$

La matrice Jacobiana della trasformazione inversa ha determinante uguale a $-1/2$; dunque:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f\left((u+v)/2, (u-v)/2\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(u^2 - v^2) \mathbf{I}_{\{u>0\}} \mathbf{I}_{\{v<4-u\}}.$$

3. Per $i = 1, 2, \ldots, n$, consideriamo la v.a. $X_i =$ che vale 1 se esce croce all'i–esimo lancio della moneta, 0 altrimenti. Le v.a. X_i sono indipendenti e Bernoulliane di parametro $\theta = P(croce)$; quindi $E(X_i) = \theta$ e $Var(X_i) = \theta(1-\theta)$.
(i) Per $\theta = 0.5$ e $n = 100$, si ha $E(X_i) = \frac{1}{2}$, $Var(X_i) = \frac{1}{4}$ e $N_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(100, 0.5)$. Allora:

$$P(40 < N_{100} < 60) =$$

$$= P\left(\frac{40 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{100}} < \frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{100}} < \frac{60 - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{100}} \right) =$$

$$= P\left(-2 < \frac{S_{100} - 100 \cdot 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{100}} < 2 \right);$$

usando l'approssimazione normale, se $W \sim \mathcal{N}(0,1)$, tale probabilità è circa uguale a:

$$P(-2 < W < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544\ .$$

(ii) Per $\theta = 0.25$ si ha $E(X_i) = \frac{1}{4}$, $Var(X_i) = \frac{3}{16}$ e $T_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, 0.25)$. Allora, utilizzando l'approssimazione normale, se $W \sim \mathcal{N}(0,1)$:

$$P\left(0.20 < \frac{N_n}{n} < 0.30\right) = P(0.20 \cdot n < N_n < 0.30 \cdot n) =$$

$$= P\left(\frac{0.20 \cdot n - n \cdot 0.25}{\sqrt{3/16}\sqrt{n}} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - n \cdot 0.25}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{n}} < \frac{0.30 \cdot n - n \cdot 0.25}{\sqrt{3/16}\sqrt{n}} \right) =$$

$$= P\left(-\frac{0.05 \cdot n}{\sqrt{3n}/4} < \frac{X_1 + \cdots + X_n - n \cdot 0.25}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{n}} < \frac{0.05 \cdot n}{\sqrt{3n}/4} \right) \cong$$

$$\cong P\left(-\frac{0.05 \cdot n}{\sqrt{3n}/4} < W < \frac{0.05 \cdot n}{\sqrt{3n}/4} \right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{0.20\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.20\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.20\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) - 1.$$

Se vogliamo che tale probabilità sia maggiore di 0.95, deve aversi:

$$\Phi\left(\frac{0.20\sqrt{n}}{\sqrt{3}}\right) > \frac{1+0.95}{2} = 0.975 = \Phi(1.96).$$

Quindi, essendo Φ una funzione crescente, occorre che sia:

$$\frac{0.20\sqrt{n}}{\sqrt{3}} > 1.96\ ,$$

ovvero $\sqrt{n} > \sqrt{3} \cdot 9.8$, da cui segue $n > 288.12$ e quindi $n \geq 289$.