Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
II prova finale a.a. 2022/23

Punteggi: **1:** 4×2.5; **2 :** 2.4×5; **3:** $4 + 4$.

1. Si lanciano ripetutamente e contemporaneamente due dadi: il primo è equilibrato, il secondo è truccato in modo da assegnare probabilità 4/9 all'uscita del 6 ed uguali probabilità all'uscita delle altre facce. Sia T il numero di lanci del primo dado, necessari per ottenere la prima volta un numero pari e S il numero di lanci del secondo dado, necessari per ottenere la prima volta la faccia 1.
(i) Trovare le distribuzioni di T ed S.
(ii) Posto $V = \max(T, S)$, trovare la densità discreta di V e $P(V = 4)$.
(iii) Calcolare $P(S^2 = T^2/4)$.
(iv) Calcolare $P(T + S \neq 3)$.

2. Per $c > 0$, sia

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \cdot \mathbf{1}_E(x, y),$$

ove $E = \{(x, y) : -y \leq x \leq y,\ y \geq 0\}$.
(i) Determinare la costante c in modo che f sia la densità congiunta di un vettore aleatorio bidimensionale (X, Y).
(ii) Trovare le densità marginali di X e Y; X e Y sono stocasticamente indipendenti?
(iii) Calcolare $E(X)$ e $E(Y)$.
(iv) Calcolare $P(|X| \leq Y)$ (suggerimento: osservare che $E = \{(x, y) : |x| \leq y,\ y \geq 0\}$).
(v) Trovare la densità congiunta del vettore aleatorio $(U, V) = (X, 2Y)$.

3. Supponiamo che il peso X delle trote cresciute in un certo allevamento commerciale abbia distribuzione normale con media μ incognita, e deviazione standard $\sigma = 0.09$ kg. Analizzando un campione casuale di 100 trote, si trova che il peso medio campionario è 1.3 kg.
(i) Trovare un intervallo di confidenza al livello $1 - \alpha = 0.99$ per la media μ incognita.
(ii) Se fosse precisamente $\mu = 1.3$, quanto varrebbe $P(|X - \mu| \leq 2\sigma)$?

Soluzioni della II prova finale a.a. 2022/23

1. (i) T è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $\frac{1}{2}$, dunque:

$$P(T = k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k},\ k = 1, 2, \ldots$$

L'evento che si ottenga la faccia 1 lanciando il secondo dado ha probabilità $1/9$. Allora S è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $\frac{1}{9}$. Quindi:

$$P(S = k) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$$

Considerato che i lanci dei due dadi non si influenzano a vicenda, T e S si possono ritenere v.a. indipendenti.
(ii) Si ha, per l'indipendenza di T ed S :

$$P(V \le k) = P(\max(T, S) \le k) = P(T \le k, S \le k) =$$

$$= P(T \le k) \cdot P(S \le k) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{j-1}\right) = \ldots = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k\right),$$

e quindi

$$P(V = k) = P(V \le k) - P(V \le k - 1) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^k\right) - \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\right).$$

Per $k = 4$, si ottiene $P(V = 4) = 0.0917$.
(iii) $S^2 = T^2/4$ è equivalente a dire che $4S^2 = T^2$, ovvero $T = 2S$. Si ha, allora

$$P(S^2 = T^2/4) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k, T = 2k)$$

e, siccome T ed S sono indipendenti, questa serie è uguale a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S = k) \cdot P(T = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{4}\right)^j = \frac{1}{28}.$$

(iv) Se $W = T + S$, si ha:

$$P(W = k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(T = h)P(S = k - h) = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{2^h} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-h-1}.$$

Sostituendo $k = 3$, si ottiene $P(W = 3) = 0.077$. Quindi $P(W \neq 3) = 1 - 0.077 = 0.923$.

2. (i) Si ha:

$$\int\int_E e^{-y}(y^2 - x^2)dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-y}dy \int_{-y}^{y} (y^2 - x^2)dx = \ldots = 8.$$

Pertanto, deve essere $c = 1/8$.
(ii) Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

Consideriamo prima il caso $x \geq 0$; allora

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{8}(y^2 - x^2)e^{-y}dy = \ldots = \frac{1}{4}e^{-x}(x + 1), \ x \geq 0.$$

Se $x \leq 0$:

$$f_X(x) = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{8}(y^2 - x^2)e^{-y}dy = \ldots = -\frac{1}{4}e^{x}(x - 1).$$

Dunque:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}e^x(x-1) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}e^{-x}(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Come si vede, $f_X(x)$ è una funzione pari.
Si ha:

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{8}(y^2 - x^2)e^{-y}dx = \ldots = \frac{1}{6}y^3e^{-y}, \ y \geq 0.$$

Siccome $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, le v.a. X e Y non sono indipendenti.
(iii) Risulta, ovviamente $E(X) = 0$, poiché $f_X(x)$ è pari, mentre

$$E(Y) = \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} y \cdot y^3e^{-y}dy = \ldots = 4.$$

(iv) Il supporto E di $f(x, y)$ si può scrivere come $E = \{(x, y) : |x| \leq y\}$.
Pertanto $P(|X| \leq Y) = P((X, Y) \in E) = 1$.
(v) Se $(U, V) = (X, 2Y)$, ovvero $X = U$ e $Y = V/2$, deve essere $V = 2Y \geq 2|X|$ e $V \geq 0$.
La matrice Jacobiana della trasformazione inversa risulta

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e $det(J) = 1/2$.
Allora:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2} f(u, v/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(v^2/4 - u^2)e^{-v/2} \cdot \mathbf{1}_E(u, v/2)$$

$$= \frac{1}{64}(v^2 - 4u^2)e^{-v/2} \cdot \mathbf{1}_F(u,v),$$

ove $F = \{(u,v) : v \geq 2|u|,\ v \geq 0\} = \{(u,v) : -v/2 \leq u \leq v/2,\ v \geq 0\}$.

3. (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \tag{$*$}$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, e la media campionaria è $\bar{x} = 1.3$; inoltre, da $1 - \alpha = 0.99$ segue $1 - \alpha/2 = 0.995$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per il peso medio delle trote del campione, al livello 0.99 è:

$$I = \left[1.3 - \frac{0.09}{10} \cdot 2.58,\ 1.3 + \frac{0.09}{10} \cdot 2.58\right] = [1.276,\ 1.323]\ .$$

(ii) Si ha:

$$P(|X - 1.3| \leq 2 \cdot 0.09)$$

$$= P(-2 \cdot 0.09 < X - 1.3 < 2 \cdot 0.09) = P(-2 \cdot 0.09/0.09 < (X - 1.3)/0.09 < 2 \cdot 0.09/0.09)$$

$$= (\Phi(2) - \Phi(-2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544\ .$$