Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
II prova finale a.a. 2016/17

Punteggi: **1:** $2+3+2+2$; **2 :** $4+3+3+3$; **3:** $4+4$.

1. Si lancia ripetutamente un dado truccato, per il quale risulta che la faccia 6 esce con probabilità $p \neq 1/6$. Sia T il numero di lanci necessario ad ottenere 6 per la prima volta, e supponiamo che $E(T) = 3$.
(i) Trovare la distribuzione di T e calcolare $P(-1/2 \leq T < \sqrt{10})$.
(ii) Sia U una v.a. discreta a valori sugli interi positivi, indipendente da T e con la stessa distribuzione di T. Trovare la densità discreta di $Z := \min(U,T)$; di che densità si tratta?
(iii) Calcolare $E(Z+3U)$ e $Var(3T-\sqrt{7})$.
(iv) Calcolare $P(T^2 = U^2)$.

2. Si consideri la v.a. bidimensionale (X,Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} x e^{-x} e^{-y/2} \mathbf{1}(x)_{\{x>0\}} \mathbf{1}(y)_{\{y>0\}}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Le v.a. X e Y sono indipendenti?
(ii) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ e $cov(X,Y)$.
(iii) Calcolare $P(Y \geq X)$. Si tratta di una quantità maggiore o minore di 1/2?
(iv) Trovare la densità di $Z = X + Y$.

3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione estratto da una popolazione con media 4.2 e varianza 4.
(i) Se $n = 25$ e $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \ldots X_n)/n$, stimare $P(|\bar{X}_n - 4.2| \leq 0.3)$, usando l'approssimazione normale.
(ii) Trovare il minimo n per cui risulta $P(|\bar{X}_n - 4.2| \leq 0.3) \geq 0.8$

Soluzioni della II prova finale a.a. 2016/17

1. (i) T è l'istante di primo successo in una successione di prove di Bernoulli indipendenti, in ciascuna delle quali la probabilità del successo p è incognita. Ricordando che $P(T = k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$ e che $E(T) = 1/p$, si ha $3 = 1/p$ che implica $P(\{6\}) = p = 1/3$. Allora:

$$P(-1/2 \leq T < \sqrt{10}) = P(T = 1) + P(T = 2) + P(T = 3)$$
$$= \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 19/27\ .$$

(ii) La v.a. $Z = \min(S, T)$ assume valori in $\{1, 2, \ldots\}$. Per l'indipendenza di U e T, si ha per $k = 1, 2, \ldots$ $P(Z \geq k) = P(U \geq k, T \geq k) = P(U \geq k)P(T \geq k)$. Ricordando che, per una v.a. T geometrica modificata di parametro p, risulta $P(T > k) = (1-p)^k$ e quindi $P(T \geq k) = P(T > k-1) = (1-p)^{k-1}$, otteniamo:

$$P(Z \geq k) = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right]^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

ed infine

$$P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

da cui segue che Z ha distribuzione geometrica modificata di parametro $5/9$.
(iii) Si ha:

$$E(Z + 3U) = E(Z) + 3E(U) = 9/5 + 3 \cdot 3 = \frac{54}{5} = 10.8\ .$$

Ricordando che $Var(T) = (1-p)/p^2$ e che, per ogni numero a, risulta $Var(X + a) = Var(X)$ e $Var(aX) = a^2 Var(X)$, si ottiene:

$$Var(3T - \sqrt{7}) = Var(3T) = 9Var(T) = 9 \cdot 6 = 54.$$

(iv) Si ha:

$$P(U^2 = T^2) = P(U = T) = \sum_{k=1}^{\infty} P(U = k, T = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(U = k)P(T = k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)^2 = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

2. (i) Siccome $f(x, y)$ si può scrivere come prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y, le v.a. X e Y sono indipendenti, e risulta $f_X(x) =$

$xe^{-x}\mathbf{1}(x)_{\{x>0\}}$, $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}\mathbf{1}(y)_{\{y>0\}}$, ossia $X \sim \Gamma(2,1)$ e $Y \sim \Gamma(1,1/2)$, ovvero Y ha distribuzione esponenziale di parametro $1/2$.
(ii) Si ha:

$$E(X) = \alpha/\lambda = 2 = 2, \ E(Y) = 1/\lambda = 2;$$

$$Var(X) = \alpha/\lambda^2 = 2, \ Var(Y) = 1/\lambda^2 = 4, \ cov(X,Y) = 0.$$

(iii) Si ha:

$$P(Y \geq X) = \frac{1}{2}\int\int_{\{y\geq x\}} xe^{-x}e^{-y/2}dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \int_x^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-y/2}dy = \int_0^{+\infty} xe^{-x}e^{-x/2}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-3x/2}dx = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{3}{2}xe^{-3x/2}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3},$$

visto che l'integrale vale $2/3$, essendo la media di una v.a. esponenziale di parametro $3/2$; dunque $P(Y \geq X) = \frac{4}{9}$.
(iv) Se $Z = X + Y$, per la formula di convoluzione, si ha per $z > 0$:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$= \int_0^z dx xe^{-x}\frac{1}{2}e^{-z/2}e^{x/2} = \frac{1}{2}e^{-z/2}\int_0^z xe^{-x/2}.$$

calcolando l'ultimo integrale per parti, si ottiene infine:

$$f_{X+Y}(z) = e^{-z/2}(2 - e^{-z/2}(z+2)), \ z > 0.$$

3.
(i) Si ha:

$$P(|(X_1 + X_2 + \dots X_n)/n - 4.2| \leq 0.3)$$

$$= P\left(-0.3\sqrt{n}/\sigma \leq (X_1 + X_2 + \dots X_n - n\cdot 4.2)/(\sigma\sqrt{n}) \leq 0.3\sqrt{n}/\sigma\right),$$

dove $\sigma = 2$. Per il teorema limite centrale, la probabilità cercata vale approssimativamente

$$\Phi(0.3\sqrt{n}/2) - \Phi(-0.3\sqrt{n}/2) = 2\Phi(0.15\sqrt{n}) - 1,$$

che, per $n = 25$, vale 0.5468 .
(ii) Basta imporre:

$$2\Phi(0.15\cdot\sqrt{n}) - 1 \geq 0.8,$$

ovvero

$$\Phi(0.15\cdot\sqrt{n}) \geq 0.9 = \Phi(1.28)$$

che implica $0.15\sqrt{n} \geq 1.28$, ossia $n \geq 72.81$, cioé $n \geq 73$.