Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

III prova scritta
A.A. 2020-2021

Durata della prova 2.5 h
Punteggi: 1) $3+3+3+3$; **2)** $2+3+3+4$; **3)** $3+3$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Si consideri la v.a. bidimensionale discreta $(X,Y) \in \{-1,0,1\} \times \{0,1\}$ con densità:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } (x,y)=(0,0),\ (x,y)=(-1,1),\ (x,y)=(1,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y; si tratta di distribuzioni note?

(ii) Calcolare $E(X),\ E(Y),\ E(X^2),\ E(Y^2)$ e $cov(X,Y)$; X e Y sono v.a. stocasticamente indipendenti?

(iii) Si lancia 300 volte una moneta, truccata in modo che la probabilità che esca Testa in ciascun lancio sia $\theta = P(Y=1) \cdot 10^{-2}$; se N rappresenta il numero di Teste uscite, calcolare approssimativamente $P(N > 1)$.

(iv) Siano U e V v.a. indipendenti, con la stessa distribuzione geometrica di parametro $p = P(Y=1)$; trovare la distribuzione di $Z = \min(U,V)$ e calcolare $P(U/2 \geq V)$.

Esercizio 2 Per $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \alpha \left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right] & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \alpha \left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right] \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

(i) Trovare il valore $\bar{\alpha}$ di α in modo che $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$ sia la densità congiunta di un vettore aleatorio bidimensionale.

(ii) Si consideri la v.a. bidimensionale (X,Y) che ha per densità $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$; si calcolino le densità marginali di X e Y, $E(X)$, $E(Y)$ e $cov(X,Y)$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

(iii) Trovare la densità di $Z = X + 2Y$ e calcolare $P(Y \leq 2X+1)$.

(iv) Calcolare $P(Y \leq X | X > 1)$.

Esercizio 3 Alcuni studenti effettuano delle misurazioni per determinare il punto di fusione dello stagno. Dai dati ottenuti da 100 diverse misurazioni effettuate, si trova una media campionaria di 231.8°C.

(i) Supponendo che il punto di fusione cercato sia distribuito secondo una v.a. con

deviazione standard $\sigma = 15.4$°C, trovare un intervallo di confidenza al livello $1-\alpha = 0.95$ per la temperatura media di fusione dello stagno.

(ii) Supponiamo ora che i dati $X_i,\ i = 1,\ldots,100$, ottenuti dalle misurazioni siano estratti da una stessa distribuzione con media 231.8 e varianza σ^2, dove σ è quella del precedente punto (i). Utilizzando l'approssimazione normale, calcolare $P(\overline{X}_{100} \leq 232)$, dove $\overline{X}_{100} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{100}}{100}$. Si tratta di una probabilità minore o maggiore di 1/2 ?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2020-21

Soluzioni III prova scritta

Esercizio 1 (i) Si ha:

$$P(X=-1, Y=0)=0,\ P(X=-1, Y=1)=1/3;$$

$$P(X=0, Y=0)=1/3,\ P(X=0, Y=1)=0;$$

$$P(X=1, Y=0)=0,\ P(X=1, Y=1)=1/3.$$

Allora:

$$P(X=-1)=P(X=-1, Y=0)+P(X=-1, Y=1)=0+1/3=1/3;$$

$$P(X=0)=P(X=0, Y=0)+P(X=0, Y=1)=1/3+0=1/3;$$

$$P(X=1)=P(X=1, Y=0)+P(X=1, Y=1)=0+1/3=1/3.$$

Pertanto, X è uniformemente distribuita in $\{-1,0,1\}$. Inoltre:

$$P(Y=0)=P(X=-1, Y=0)+P(X=0, Y=0)+P(X=1, Y=0)=0+1/3+0=1/3;$$

$$P(Y=1)=P(X=-1, Y=1)+P(X=0, Y=1)+P(X=1, Y=1)$$
$$=1/3+0+1/3=2/3.$$

Pertanto, Y ha distribuzione di Bernoulli di parametro $p=2/3$.

(ii) Si ha:

$$E(X)=(-1)\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1\cdot 1/3=0,\ E(Y)=p=2/3;$$
$$E(X^2)=(-1)^2\cdot 1/3+0^2\cdot 1/3+1^2\cdot 1/3=2/3,$$
$$E(Y^2)=var(Y)+E^2(Y)=p(1-p)+p^2=p=2/3.$$

Per calcolare la covarianza di (X,Y) occorre prima calcolare la media di $Z=XY$; osserviamo che Z può assumere valori nell'insieme $\{-1,0,1\}$ con probabilità:

$$P(Z=-1)=P(X=-1, Y=1)=1/3,$$

$$P(Z=0)=P(X=0, Y=0)+P(X=0, Y=1)+P(X=-1, Y=0)+P(X=1, Y=0)$$
$$=1/3+0+0+0=1/3,\ P(Z=1)=P(X=1, Y=1)=1/3.$$

Quindi, anche X è uniformemente distribuita in $\{-1,0,1\}$, per cui $E(XY)=E(Z)=0$. Dunque $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$.

Però X e Y non sono indipendenti, poiché, ad esempio

$$1/3=P(X=1, Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\ .$$

(iii) La v.a. N ha distribuzione binomiale di parametri $(300, \frac{2}{3}\cdot 10^{-2})$; per l' approssimazione di Poisson, si ha $P(N>1)\approx P(W>1)$, dove $W\sim\ Poisson(\lambda)$, con $\lambda=np=300\cdot\frac{2}{3}\cdot 10^{-2}=2$; quindi $P(N>1)\approx 1-P(W=0)-P(W=1)=1-3e^{-2}$.

(iv) Se $Z=\min(U,V)$, risulta, per l'indipendenza di U e V :

$$P(Z>n)=P(U>n, V>n)=P(U>n)P(V>n)$$

$$= P(U+1>n+1)P(V+1>n+1) = \left[(1-2/3)^{n+1}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{n+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1};$$

quindi $P(Z>n) = P(Z+1>n+1) = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$, per cui $Z+1$ ha distribuzione geometrica modificata di parametro $8/9$, ovvero Z ha distribuzione geometrica di parametro $8/9$.

Si ha, per l'indipendenza di U e V :

$$P(U/2 \geq V) = P(U \geq 2V) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U \geq 2k)P(V=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{3k} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^k = \frac{2}{3}\cdot\frac{27}{26} = \frac{9}{13}\ .$$

(Abbiamo usato il fatto che che $U+1$ ha distribuzione geometrica modificata e quindi $P(U \geq 2k) = P(U > 2k-1) = P(U+1 > 2k) = (1/3)^{2k}$)

Esercizio 2 (i) Per $\alpha > 0$ la funzione $f_\alpha(x,y)$ è continua e positiva per $x, y > 0$. Calcolando l'integrale doppio di $f_\alpha(x,y)$ esteso a $\mathbf{R}_+{}^2$, si ottiene $\frac{5}{4}\alpha$; imponendo che tale valore sia uguale a 1, si ottiene $\bar{\alpha} = \frac{4}{5}$. Dunque, si ottiene la densità:

$$f_{\bar{\alpha}}(x,y) = \frac{4}{5}\left[e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(y).$$

(ii) La densità marginale di X è:

$$f_X(x) = \frac{4}{5}\left[e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y}dy + \frac{e^{-2x}}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{5}\left[e^{-x} + e^{-2x}/2\right] = \frac{4}{5}e^{-x}(1+e^{-x}/2), & x>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Visto che l'espressione di $f_{\bar{\alpha}}(x,y)$ è simmetrica rispetto a x e y, si ottiene analogamente

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{5}e^{-y}(1+e^{-y}/2), & y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si ha:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{4}{5}\int_0^{+\infty}(xe^{-x} + \frac{x}{2}e^{-2x})dx = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{8} = \frac{9}{10}$$

(il calcolo è stato effettuato agevolmente, ricordando la formula per la media di una v.a. esponenziale di parametro λ). Naturalmente, si ottiene anche $E(Y) = E(X) = \frac{9}{10}$, visto che X e Y hanno la stessa distribuzione.

Si ha:

$$E(XY) = \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy\ xy\left(e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx\ xe^{-x}\int_0^{+\infty} dy\ ye^{-y} + \int_0^{+\infty} dx\ xe^{-2x}\int_0^{+\infty} dy\ ye^{-2y}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left(1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1$$

(anche qui, abbiamo sfruttato la formula per la media di una v.a. esponenziale di parametro λ).

Quindi, otteniamo:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{19}{100} = 0.19 \neq 0,$$

per cui le v.a. X e Y non sono stocasticamente indipendenti; d'altra parte, ciò segue anche dal fatto che la densità congiunta di (X,Y) non è uguale al prodotto delle densità marginali.

(iii) La v.a. $Z = X + 2Y$ assume valori positivi; utilizziamo il metodo di cambiamento di variabili. Consideriamo la trasformazione

$$\psi : \begin{cases} x = x \\ z = x + 2y \end{cases} \qquad \psi^{-1} : \begin{cases} x = x \\ y = (z-x)/2 \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della trasormazione inversa è :

$$J_{\psi^{-1}}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante uguale a $1/2$. Quindi, si ottiene per la densità congiunta di (X,Z) :

$$f_{(X,Z)}(x,z) = f_{(X,Y)}(x,(z-x)/2)\ \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\left[e^{-(x+(z-x)/2)} + e^{-2(x+(z-x)/2)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z)$$

$$= \frac{2}{5}\left[e^{-(x+z/2)} + e^{(x+z)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z).$$

Quindi, per $z > 0$ la densità di Z è:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{2}{5}\left[e^{-(x+z/2)} + e^{(x+z)}\right]\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\mathbf{1}_{\{x<z\}}(z)$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^z dx\left(e^{-z/2}e^{-x/2} + e^{-z}e^{-x}\right) = \frac{2}{5}\left[e^{-z/2}\cdot 2(1-e^{-z/2}) + e^{-z}(1-e^{-z})\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[2e^{-z/2} - e^{-z} - e^{-2z}\right],\ z > 0.$$

Inoltre:

$$P(Y \leq 2X+1) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{2x+1} dy f_{\bar\alpha}(x,y)$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx e^{-x}\int_0^{2x+1} e^{-y}dy + \int_0^{+\infty} dx e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2x+1} 2e^{-2y}dy\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx e^{-x}\left(1-e^{-2x-1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dx e^{-2x}\left(1-e^{-4x-2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_0^{+\infty} dx\left(e^{-x} - e^{-3x}e^{-1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} dx\left(e^{-2x} - e^{-6x}e^{-2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[1 - \frac{1}{3}e^{-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^{-2}\right)\right] = \frac{1}{15}(15 - 4e^{-1} - e^{-2}) \approx 0.8928$$

(iv) Si ha:

$$P(Y \leq X | X > 1) = \frac{P(Y \leq X,\ X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{\int\int_A f(x,y)dxdy}{\int_1^{+\infty} f_X(x)dx},$$

dove $f(x,y)$ è la densità di (X,Y), $f_X(x)$ è la densità di X e
$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 1,\ 0 < y < x\}$.
Il numeratore vale:

$$Num = \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx \int_0^x dy \left(e^{-(x+y)} + e^{-2(x+y)}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dxe^{-x} \int_0^x dye^{-y} + \int_1^{+\infty} dxe^{-2x} \cdot \frac{1}{2}\int_0^x dy2e^{-2y}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dxe^{-x}(1-e^{-x}) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dxe^{-2x}(1-e^{-2x})\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} dx(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} dx(e^{-2x} - e^{-4x})\right]$$

$$= \frac{e^{-1}}{10}(8 - 2e^{-1} - e^{-2}) \approx 0.2654$$

Il denominatore vale:

$$Denom = \frac{4}{5}\left[\int_1^{+\infty} (e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x})dx\right] = \frac{e^{-1}}{5}(4 + e^{-1}).$$

Dunque, la probabilità cercata è:

$$\frac{Num}{Denom} = \frac{\frac{e^{-1}}{10}(8 - 2e^{-1} - e^{-2})}{\frac{e^{-1}}{5}(4 + e^{-1})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 - 2e^{-1} - e^{-3}}{4 + e^{-1}} \approx 0.8258\ .$$

Esercizio 3 Un intervallo I di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, la media campionaria è $\bar{x} = 231.8$, e $\sigma = 15.4$;

(i) se $1 - \alpha = 0.95$, allora $1 - \alpha/2 = 0.975$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene che un intervallo di confidenza per la temperatura media di fusione dello stagno, al livello 0.95 è:

$$I = \left[231.8 - \frac{15.4}{10} \cdot 1.96,\ 231.8 + \frac{15.4}{10} \cdot 1.96\right] = [228.7816,\ 234.8184]\ .$$

(ii) Si ha:

$$P\left(\overline{X}_{100} \leq t\right) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100} \leq t\right) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \leq 100t)$$

$$= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 231.8}{15.4\sqrt{100}} \leq \frac{100t - 100 \cdot 231.8}{15.4\sqrt{100}}\right)$$

che, per l'approssimazione normale vale circa

$$\Phi\left(\frac{100(t-231.8)}{15.4\sqrt{100}}\right)=\Phi\left(\frac{10(t-231.8)}{15.4}\right).$$

Quindi, per $t=232$, si ottiene:

$$P(\overline{X}_{100}\leq 232)\approx\Phi\left(\frac{10(232-231.8)}{15.4}\right)=\Phi(0.1298)\approx 0.59\ .$$