Calcolo delle Probabilità e Statistica, Ingegneria Civile e A&T e Informatica
III prova finale a.a. 2018/19

Punteggi: **1:** $3+4+3$; **2 :** $4+4+4$; **3:** $4+4$.

1. Si lanciano ripetutamente e contemporaneamente due monete (M_1 e M_2): M_1 è equilibrata, mentre M_2 è truccata in modo che la probabilità di ottenere Testa è $1/9$. Sia T il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta Testa, lanciando M_1 e S il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta Testa lanciando M_2.. Si può ritenere che T ed S siano v.a. indipendenti?
(i) Se $X = \min(T, S)$, trovare la densità discreta di X e $P(X = 5)$.
(ii) Calcolare $P(T = 3S)$.
(iii) Calcolare $P(T + S = 3)$.

2. Determinare $a > 0$ affinché

$$f(x,y) = \begin{cases} x^a + y^a & \text{se } 0 < x < a,\ 0 < y < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia la densità congiunta di un vettore aleatorio bidimensionale (X, Y).
(i) Per il valore di a determinato, trovare le densità marginali di X e Y e dire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.
(ii) Posto $Z = X + Y$, trovare la funzione di ripartizione e la densità di Z.
(iii) Calcolare $P(Y \leq 4X^2)$ e trovare $\beta > 0$ tale che $P(Z \leq \beta) = 1/24$.

3. Sia X una v.a. con distribuzione normale di media μ e varianza $\sigma^2 = 25$.
(i) Per $\mu = 4$, trovare t e s tali che $P(X \leq t) = 1/2$ e $P(X \leq s) = 0.84$.
(ii) Supponiamo ora che μ sia incognito e che la media campionaria $\overline{x}_n$ di $n = 400$ v.a. indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X sia uguale a 3.6. Trovare un intervallo di confidenza per μ al livello $1 - \alpha = 0.95$.

Soluzioni della III prova finale a.a. 2018/10

1. (i) T è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $p = \frac{1}{2}$, dunque:

$$P(T = k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Invece, S è l'istante di primo successo in una successione di prove indipendenti e Bernoulliane in cui la probabilità del successo è $p' = \frac{1}{9}$. Quindi:

$$P(S = k) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Considerato che il risultato del lancio di M_1 non influenza quello di M_2, T e S si possono ritenere v.a. indipendenti.
Si ha, per l'indipendenza di T ed S :

$$P(X > k) = P(\min(T, S) > k) = P(T > k, S > k) =$$

$$= P(T > k) \cdot P(S > k) =$$

(ricordando la formula per $P(T > k)$)

$$(1 - p)^k (1 - p')^k = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9}\right)^k$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^k = (1 - 5/9)^k$$

e quindi X ha distribuzione geometrica modificata di parametro $q = 5/9$, ovvero:

$$P(X = k) = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Sostituendo $k = 5$, si ottiene:

$$P(X = 5) = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^4 = 0.0217$$

(ii)

$$P(T = 3S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = k, T = 3k)$$

e, siccome T ed S sono indipendenti, questa serie è uguale a:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(S=k)\cdot P(T=3k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}\right)^{k} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{9}{8}-1\right) = \frac{1}{64}\ .$$

(iii) Se $Z = T + S$, si ha:

$$P(Z=k) = \sum_{h=1}^{k-1} P(T=h)P(S=k-h) = \sum_{h=1}^{k-1}\frac{1}{2^h}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-h-1}.$$

Sostituendo $k = 3$, si ottiene $P(Z = 3) = 0.077$.

2. (i) Si ha:

$$\int_0^a dx \int_0^a dy (x^a + y^a) = 2a^{a+2}/(a+1),$$

per cui deve essere $2a^{a+2} = a + 1$, da cui si ottiene $a = 1$.
Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{(0,1)^2}(x,y)\cdot(x+y)dy$$

Dunque, per $x \notin (0, 1)$ risulta $f_X(x) = 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ si ottiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dx & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & \text{se } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto, X e Y hanno stessa legge, ma non sono indipendenti, in quanto $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

(ii) Per $z \in (0, 2)$, la densità di $Z = X + Y$ è data dalla formula:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{1}_{(0,1)}(z-x)\cdot(x+z-x)\ dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{(z-1,z)}(x)\cdot z\ dx$$

Pertanto:

se $z \in (0,1)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_0^z z dx = z^2$$

se $z \in (1,2)$, si ottiene:

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 z dx = z(2-z)$$

In conclusione:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \le 0 \\ z^2 & \text{se } z \in (0,1) \\ z(2-z) & \text{se } z \in (1,2) \\ 0 & \text{se } z \ge 2 \end{cases}$$

Dunque, poiché $F_Z(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t)dt$, si ottiene

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \le 0 \\ z^3/3 & \text{se } z \in (0,1) \\ z^2 - z^3/3 - 1/3 & \text{se } z \in (1,2) \\ 0 & \text{se } z \ge 2 \end{cases}$$

(iii) Si ha:

$$P(Y > 4X^2) = 1 - \int_0^{1/2} dx \int_{4x^2}^1 (x+y)dy = 1 - \int_0^{1/2} dx \Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_{y=4x^2}^{y=1} =$$

$$= 1 - \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} + x - 4x^3 - 8x^4\right) dx = \ldots = 1 - \frac{21}{80} = \frac{59}{80}\ .$$

Affinché sia $P(Z \le \beta) = 1/24$, deve essere $\beta^3/3 = 1/24$, ovvero $\beta = 1/2$.

3. (i) Si ha:

$$P(X \le t) = P((X-4)/5 \le (t-4)/5) = \Phi((t-4)/5)$$

Pertanto: $P(X \le t) = 1/2 = \Phi(0)\ \Rightarrow (t-4)/5 = 0$, ovvero $t = 4$.
$P(X \le s) = 0.84 = \Phi(1)\ \Rightarrow (s-4)/5 = 1$, ovvero $s = 9$.

(ii) Come noto, un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita μ di una distribuzione di cui è nota la varianza σ^2 è il seguente:

$$I = \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right],$$

dove $\bar{x}_n$ denota la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso attuale, risulta $\bar{x}_n = 3.6$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$, $n = 400$. Essendo $1-\alpha = 0.95$, si ha $\alpha/2 = 0.025$, $1-\alpha/2 = 0.975$ e $\phi_{1-\alpha/2} = 1.96$. In conclusione, un intervallo di confidenza per μ al livello 0.95 è

$$\left[3.6 - \frac{5}{\sqrt{400}}\cdot 1.96,\ 3.6 + \frac{5}{\sqrt{400}}\cdot 1.96\right] = [3.11,\ 4.09]\ .$$