Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica A.A. 2015/16
Complementi di Probabilità e Statistica

Esonero del 01-02-16 (Processi di Markov)

Punteggi: **1)** 2×6; **2)** 4×2; **3)** 2.5×4;
totale = 30.

Esercizio 1. Per $\beta \in [0,1]$, Si consideri la CM a tempo discreto ed omogenea su $E = \{1,2,3\}$ con matrice delle probabilità di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 5/18 & 1/2 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \beta/2 & \beta/2 & 1-\beta \end{pmatrix}$$

(i) Classificare, per ogni $\beta \in [0,1]$ gli stati della CM, individuando eventuali stati periodici, e dire se la distribuzione uniforme su $\{1,2,3\}$ è reversibile.
(ii) Se $\nu = (1/3, 1/3, 1/3)$, è la distribuzione iniziale, calcolare $P(X_2 = 3)$ per $\beta = 2/3$.
(iii) Per $\beta = 0$ e $n \geq 1$, calcolare $\sum_{j=1}^{3} p_{3j}^{(n)}$. Inoltre, per $\beta = 0$, calcolare il tempo medio η_i per giungere in $\{3\}$, partendo dallo stato $i \in \{1,2\}$, verificando che $57 \cdot \eta_1 = 63 \cdot \eta_2$ e giustificando il fatto che $\eta_1 > \eta_2$.
(iv) Se $\beta = 2/3$, calcolare, per ogni n, $p_{1j}^{(n)},\ j \in E$.
(v) Per $\beta = 2/3$, calcolare i tempi medi di primo ritorno nei vari stati, m_i, se essi sono ben definiti, e stimare la velocità di convergenza alla stazionarietà.
(vi) Stimare, per n grande, $P(X_{2^n} = 3, X_{2^{n-1}} = 1)$.

Esercizio 2. (i) Si consideri una coda $M/M/1$ ove gli arrivi sono Poissoniani con intensità $\lambda > 0$ e i tempi di servizio hanno distribuzione esponenziale di parametro $\mu > 0$. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$. Indichiamo con T il tempo che un cliente trascorre nel sistema in regime stazionario, e con τ_2 il tempo di arrivo del secondo cliente. Sapendo che $E(T^2) = 2$ e che $P(\tau_2 > 1) = 2/e$, trovare la distribuzione stazionaria $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ tale che $\pi_i = P(X(\infty) = i)$.
(ii) Si consideri ora un'altra coda $M/M/3$, e denotiamo con L il numero medio dei clienti nel sistema in regime stazionario, con L_c il numero medio dei clienti in attesa nella coda, in regime stazionario, con W il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema, e con W_c il tempo medio di attesa di un cliente in coda. Sapendo che $L = 3,\ W = 2$ e $L_c = 9/4$, trovare la distribuzione stazionaria $\pi_k = P(X(\infty) = k),\ k = 0, 1, \dots$, e calcolare $P(X(\infty)) > 3$.

Esercizio 3 (9 crediti). Si consideri la CM a tempo continuo ed omogenea $X(t)$ con spazio degli stati $E = \{1,2,3\}$, avente per generatore la matrice Q tale che:
(a) $q_{12} = q_{23} = 1/4$; (b) detto R_i il tempo di permanenza della CM nello stato i $(i = 1,2,3)$, risulti $E(R_2) = 2E(R_1)$, $E(R_1) = E(R_3)$ e $E(R_1) < 2$; (c) la matrice $P(t)$ delle probabilità di transizione sia bistocastica; (d) risulti $(Q^2)_{12} = -3/16$.
(i) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i per la CM, e quella stazionaria π, se esiste.
(ii) Calcolare $P(0.5 < R_2 < 1)$.
(iii) Calcolare approssimativamente le probabilità di transizione $p_{ij}(t)$ al tempo $t = 0.01$.
(iv) Calcolare le probabilità di transizione $\widehat{p}_{ij}$ della CM a tempo discreto "accelerata", ottenuta da $X(t)$ trascurando il tempo di permanenza nei vari stati e trovare, se esiste, la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ associata a questa ultima CM. Calcolare $dist(\pi, \widehat{\pi})$; nel caso la distanza tra le due distribuzioni sia diversa da zero, spiegarne il motivo.

Complementi di Probabilità e Statistica a.a. 2015/16
Soluzioni della prova di esonero del 01-02-16

1. (i) la distribuzione uniforme ν non è reversibile, in quanto dovrebbe risultare $\nu_i p_{ij} = \nu_j p_{ji}$, ovvero, per $\nu_i = 1/3$, $p_{ij} = p_{ji}$, che non è verificata, essendo la matrice P non simmetrica. Inoltre, per $\beta = 0$ lo stato 3 è assorbente e 1 e 2 sono transitori. Per $\beta \in (0, 1]$ gli stati sono tutti ricorrenti; inoltre, per $i = 1, 2, 3$, si verifica facilmente che $p_{ii}^{(2)} > 0$ e $p_{ii}^{(3)} > 0$, per cui, essendo 2 e 3 primi tra loro, non vi sono stati periodici.
(ii) Se $\beta = 2/3$, la matrice P diventa:

$$P = \begin{pmatrix} 5/18 & 1/2 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

avendosi

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.3179012 & 0.3796296 & 0.3024691 \\ 0.3148148 & 0.3888889 & 0.2962963 \\ 0.3148148 & 0.3888889 & 0.2962963 \end{pmatrix} > 0.$$

Si ha:

$$P(X_2 = 3) = \sum_{i=1}^{3} p_{i3}^{(2)} \nu_i = \frac{1}{3}(p_{13}^{(2)} + p_{23}^{(2)} + p_{33}^{(2)})$$

$$= \frac{1}{3}(0.3024691 + 0.2962963 + 0.2962963) = 0.2983539 \ .$$

(iii) Se $\beta = 0$ lo stato 3 è assorbente, quindi $p_{31}^{(n)} = p_{32}^{(n)} = 0$ per ogni n, mentre $p_{33}^{(n)} = 1$; quindi $\sum_{j=1}^{3} p_{3j}^{(n)} = p_{33}^{(n)} = 1$.
I tempi medi, η_i, di assorbimento in 3, partendo dallo stato $i \in \{1, 2\}$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 + p_{11}\eta_1 + p_{12}\eta_2 \\ \eta_2 = 1 + p_{21}\eta_1 + p_{22}\eta_2 \end{cases}$$

che ha soluzione $\eta_1 = \frac{63}{17}$, $\eta_2 = \frac{57}{17}$; il fatto che $\eta_1 > \eta_2$ si spiega col fatto che la probabilità di transizione da 1 in 3 è minore di quella da 2 in 3.
(iv) Per $\beta = 2/3$ gli autovalori di P sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/18$, e $\lambda_3 = 0$. Pertanto, si ha:

$$p_{1j}^{(n)} = A_{1j} + (-1/18)^n B_{1j} \ n = 1, 2, \ldots$$

Per $i = 1$, $j = 1$, ponendo $n = 1$ e $n = 2$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \frac{5}{18} = A_{11} - \frac{1}{18} B_{11} \\ 0.3179 = A_{11} + \frac{1}{324} B_{11} \end{cases}$$

che, risolto, fornisce $A_{11} = 0.3157$ e $B_{11} = 0.6842$.
Pertanto $p_{11}^{(n)} = 0.3157 + 0.6842 \cdot (-1/18)^n$.
Per $i = 1$, $j = 2$, ponendo $n = 1$ e $n = 2$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = A_{12} - \frac{1}{18} B_{12} \\ 0.3796 = A_{12} + \frac{1}{324} B_{12} \end{cases}$$

che, risolto, fornisce $A_{12} = 0.3859$ e $B_{12} = -2.0538$.
Pertanto $p_{12}^{(n)} = 0.3859 - 2.0538 \cdot (-1/18)^n$.

Per $i = 1,\ j = 3$, ponendo $n = 1$ e $n = 2$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{9} = A_{13} - \frac{1}{18}B_{13} \\ 0.3024 = A_{13} + \frac{1}{324}B_{13} \end{cases}$$

che, risolto, fornisce $A_{13} = 0.2982$ e $B_{13} = 1.3672$.
Pertanto $p_{13}^{(n)} = 0.2982 + 1.3672 \cdot (-1/18)^n$.
(v) Per $\beta = 2/3$ la CM è regolare, pertanto esiste la distribuzione stazionaria π ed è soluzione dell' equazione $\pi = \pi P$; risolvendola, si ottiene $\pi = (\frac{6}{19}, \frac{22}{57}, \frac{17}{57}) = (0.3157\ , 0.3859\ , 0.2982)$ in accordo con quanto trovato al punto (iv). La velocità di convergenza alla stazionarietà è abbastanza alta, visto che $|\lambda_2| = 1/18$ è abbastanza piccolo.
(vi) Si ha:

$$P\left(X_{2^n} = 3, X_{2^{n-1}} = 1\right) = P\left(X_{2^n} = 3 | X_{2^{n-1}} = 1\right) P\left(X_{2^{n-1}} = 1\right) \approx$$

(per l'omogeneità, e per n grande)

$$p_{13}^{(2^{n-1})}\pi_1 = (0.2982 + 1.3672 \cdot (-1/18)^{2^{n-1}}) \cdot 0.3157\ .$$

2. (i)
Siccome T ha distribuzione esponenziale di parametro $\mu - \lambda$, risulta $E(T) = 1/(\mu - \lambda)$ e $Var(T) = 1/(\mu - \lambda^2)$; pertanto, $E(T^2) = Var(T) + E^2(T) = 2/(\mu - \lambda)^2$. Uguagliando a 2, si ottiene $\mu - \lambda = \pm 1$, e quindi $\mu - \lambda = 1$, dovendo essere $\mu - \lambda > 0$ per esistere la distribuzione stazionaria.
Il tempo di arrivo del secondo cliente ha distribuzione Gamma di parametri 2 e λ, e risulta $P(\tau_2 > 1) = \sum_{k=0}^{1} e^{-\lambda}\lambda^k/k! = (1+\lambda)e^{-\lambda}$. Uguagliando a $2/e$, si ottiene $\lambda = 1$. In conclusione, $\lambda = 1$ e $\mu = 2$.
(ii) Per le relazioni di Little, si ha $\lambda = L/W = 3/2$. Inoltre $W = W_c + 1/\mu$ da cui $2 = W_c + 1/\mu$; infine, $W_c = L_c/\lambda = (9/4)/(3/2) = 3/2$, per cui $1/\mu = 1/2$, ovvero $\mu = 2$. Quindi, abbiamo una coda M/M/3 con $\rho = \lambda/\mu = 3/4 < 1$. La distribuzione stazionaria esiste ed è data da:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!}\pi_0, & k = 1, 2, 3 \\ \frac{\rho^k}{3!3^{k-3}}\pi_0, & k \geq 4 \end{cases}$$

con

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^4}{6(3-\rho)}\right]^{-1}.$$

Infine, $P(X(\infty) > 3) = 1 - P(X(\infty) \leq 3)$, si ottiene immediatamente.

3. (i) Siccome R_i ha distribuzione esponenziale di parametro $-q_{ii}$, si ha che $E(R_i) = -1/q_{ii}$; allora, tenendo conto delle varie condizioni, e del fatto che, per essere $P(t) = \exp(tQ)$ bistocastica, la somma degli elementi di ciascuna colonna di Q deve essere zero, si ottiene che il generatore deve avere la forma:

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & 1/4 & \alpha - 1/4 \\ \alpha/2 - 1/4 & -\alpha/2 & 1/4 \\ \alpha/2 + 1/4 & \alpha/2 - 1/4 & -\alpha \end{pmatrix}$$

dove $\alpha \geq 0$. inoltre, dalla condizione $(Q)_{12}^2 = -3/16$, si ottiene l'equazione $-\alpha/4 - \alpha/8 + (\alpha - 1/4)(\alpha/2 - 1/4) = -3/16$, le cui soluzioni sono $\alpha = 1/2$ e $\alpha = 1$; siccome viene ulteriormente richiesto che $1/\alpha = E(R_1) < 2$, ovvero $\alpha > 1/2$, si trova infine che $\alpha = 1$ (l'altra soluzione si scarta). Dunque, il generatore è:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Siccome $P(t)$ è bistocastica, la distribuzione invariante è quella uniforme $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$. La distribuzione trovata è anche stazionaria, come segue dal successivo punto (iii), essendo $P(h) > 0$ per h piccolo; per $t > 0$, se n è opportunamente grande, $h = t/n$ è piccolo quanto si vuole, inoltre $P(t) = P(t/n)^n > 0$, cosicché $P(t)$ è regolare. Ciò si deduce anche dal fatto che esiste una potenza di Q tale che $(Q^n)_{ij} > 0$ per $i \neq j$, oppure dal fatto che gli autovalori di Q sono $-7/4$, $-3/4$ e 0, cosicché quelli non nulli sono negativi (in generale, serve parte reale negativa).
(ii) Siccome R_2 ha distribuzione esponenziale di parametro $1/2$, si ha che $P(0.5 < R_2 < 1) = e^{-1/4} - e^{-1/2}$.
(iii) Si ha:

$$P(h) = Id + hQ + o(h), \quad \text{per } h \to 0.$$

Pertanto:

$$P(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.01 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9900808 & 0.0024906 & 0.0074286 \\ 0.0024906 & 0.9950187 & 0.0024906 \\ 0.0074286 & 0.0024906 & 0.9900808 \end{pmatrix}$$

Risulta $P(0.01) > 0$, ovvero $P(0.01)$ è regolare.
(iv) La CM a tempo discreto "accelerata" ha probabilità di transizione $\widehat{p}_{ij} = q_{ij}/(-q_{ii})$, per $i \neq j$, e $\widehat{p}_{ii} = 0$; pertanto:

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome questa CM a tempo discreto è regolare ($\widehat{P}^2 > 0$), la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ coincide con quella invariante e si ottiene risolvendo l'equazione $\widehat{\pi}\widehat{P} = \widehat{\pi}$, da cui si ricava:

$$\widehat{\pi} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \neq \pi$$

Si ha:

$$dist(\pi, \widehat{\pi}) = \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{6}}{15} .$$

La CM a tempo continuo originale e quella "accelerata" non hanno lo stesso comportamento, in quanto per la prima CM i tempi medi di permanenza nei tre stati non sono tutti uguali tra loro (sono rispettivamente 1, 2 e 1) e quindi la CM a tempo continuo spende diverse frazioni di tempo soggiornando nei diversi stati. Se tali tempi medi fossero stati uguali, le due catene avrebbero evidenziato lo stesso comportamento all'equilibrio.