FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
INGEGNERIA CIVILE E A&T E INFORMATICA

SECONDA PROVA DI VALUTAZIONE IN ITINERE - 18 GIUGNO 2024
A.A. 2023-2024

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $6+6+6$; **2)** $3+5+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Sia (X,Y) un vettore aleatorio tale che Y sia esponenziale di parametro λ mentre la densità condizionale di X dato $\{Y=y\}$ ha la seguente espressione

$$f_{X|Y}(x|y) = \lambda e^{-\lambda(x-y)} I_{(y,+\infty)}(x).$$

(i) Trovare le densità marginale di X e la densità condizionale $f_{Y|X}(y|1)$. Calcolare inoltre $cov(4X-3Y,Y)$.

(ii) Calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio $(U,V)=(X-Y,Y)$. Calcolare inoltre, quando $\lambda=1$, $P(U \leq V \leq 2U+1)$.

(iii) Calcolare la densità di $Z=U/(U+V)$.

Esercizio 2 La percentuale di uova nella ricetta della pasta fresca è del 14%. Per la produzione di pasta si utilizza una macchina impastatrice che fornisce un impasto contenente una quantità di uova modellizzabile come una v.a. $X \sim N(m,1)$.

(i) Se $m=14$ qual è la probabilità che un pacco di pasta contenga meno del 12% di uova?

(ii) Una ditta produttrice di pasta si è impegnata a rispettare uno standard secondo cui non più del 5% delle confezioni contenga meno del 14% di uovo. Qual è il minimo valore di m al quale si può tarare la macchina impastatrice per adeguarsi a questo standard?

(iii) Un ispettore vuole valutare se effettivamente la macchina sia stata tarata al valore stimato al punto precedente e, per controllarlo, analizza un campione di 16 confezioni, osservando una percentuale di uova pari al 15.5%. Calcolare un intervallo di confidenza di livello 0.95 per m. Sulla base di questa indagine cosa conclude l'ispettore?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2023-24

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 18 Maggio 2024

Esercizio 1 (i) È necessario notare che a densità congiunta del vettore (X,Y) ha l'espressione

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} I_{(y,+\infty)}(x) I_{(0,+\infty)}(y).$$

La densità di X è nulla per $x \leq 0$, mentre per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x} I_{(y,+\infty)}(x)dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x dy = \lambda^2 x e^{-\lambda x},$$

ovvero $X \sim \Gamma(2,\lambda)$.
La densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$, $y \notin [0,1]$ è nulla per $y \leq 0$, mentre per $y \in [0,1]$ si ha

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda} I_{[0,1]}(y)}{\lambda^2 e^{-\lambda}} = I_{[0,1]}(y),$$

ovvero è una densità $Unif[0,1]$).

$$cov(4X - 3Y, Y) = 4cov(X,Y) - 3var(Y).$$

Ora $Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$ mentre

$$E(XY) = \int_0^\infty x\lambda^2 e^{-\lambda x} dx \int_0^x y dy = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^2}{2} \times \frac{\Gamma(4)}{\lambda^4} = \frac{3}{\lambda^2}.$$

e quindi

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Pertanto

$$cov(4X - 3Y, Y) = 4\frac{1}{\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(ii) Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} U = & X - Y \\ V = & Y \end{cases} \quad \text{e la sua trasformazione inversa} \quad \begin{cases} X = & U + V \\ Y = & V \end{cases}$$

con

$$J_{g^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ detJ_{g^{-1}}(u,v) = 1.$$

Allora, la densità di (U,V) è :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f\,(u+v,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} I_{(v,+\infty)}(u+v) I_{(0,+\infty)}(v). = \lambda^2 e^{-\lambda u} I_{(0,+\infty)}(u) e^{-\lambda v} I_{(0,+\infty)}(v)$$

Osserviamo che le variabili aleatorie U e V sono indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Pertanto

$$\begin{aligned} P(U \leq V \leq 2U+1) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} du \int_u^{2u+1} \lambda e^{-\lambda v} dv = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} \left[e^{-\lambda u} - e^{-\lambda(2u+1)} \right] du = \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-2\lambda u} du - e^{-\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-3\lambda u} du = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

(iii) Sia $Z = U/(U+V)$ con U e V indipendenti ed esponenziali di parametro λ. Allora $Im(Z) = [0,1]$ e, se $0 < z < 1$ si ha:

$$P(Z \le z) = P\left(V \ge \left(\frac{1-z}{z}\right) U\right) =$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du \int_{(1/z-1)u}^{+\infty} e^{-\lambda v} dv \; =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda(1/z-1)u} \; du = z.$$

Dunque, $Z \sim Uni((0,1))$.

Esercizio 2 (i) Si ha:

$P(X < 12) = P(X \le 12) = P((X-14) \le 12-14) = \Phi(-2) = 1-\Phi(2) = 1-0.97 = 0.03$.

(ii) Bisogna calcolare m in modo tale che $P(X \le 14) \le 0.05$.

$$P(X \le 14) = P((X-m) \le 14-m) = \Phi(14-m)$$

e quindi l'equazione da risolvere è

$$\Phi(14-m) \le 0.05, \text{ ovvero } 14-m \le \phi_{0.05}.$$

Ora, il quantile $\phi_{0.05}$ deve essere necessariamente negativo, diciamo $\phi_{0.05} = -a,\ a > 0$; quindi, deve aversi $\Phi(-a) = 0.05$, ovvero $1 - \Phi(a) = 0.05$, $\Phi(a) = 0.95 = \Phi(1.64)$ (dalla tavola). Pertanto $a = 1.64$ e $\phi_{0.05} = -a = -1.64$. Quindi, riprendendo la disequazione $14 - m \le \phi_{0.05}$, otteniamo $m \ge 14 + 1.64 = 15.64$; dunque, il minimo valore di m al quale la macchina deve essere tarata è $m = 15.64$.

(iii) Come noto, un intervallo di confidenza a livello $1-\alpha$ per la media incognita μ di una distribuzione di cui è nota la varianza σ^2 è il seguente:

$$I = \left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{1-\alpha/2}\right],$$

dove $\bar{x}_n$ denota la media campionaria e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso attuale, risulta $\bar{x}_n = 15.5$, $\sigma = 1$, $n = 16$. Essendo $1-\alpha = 0.95$, si ha $\alpha/2 = 0.025$, $1-\alpha/2 = 0.975$ e $\phi_{1-\alpha/2} = 1.96$. In conclusione, un intervallo di confidenza per μ al livello 0.95 è

$$\left[15.5 - \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 1.96,\ 15.5 + \frac{1}{\sqrt{16}} \cdot 1.96\right] = [15.01,\ 15.99].$$

In conclusiione, poiché tale intervallo contiene il valore cui è stata tarata la macchina, se ne conclude che la ditta si è adeguata allo standard richiesto.