Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 16 Giugno 2023
A.A. 2022-2023

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $4+4+5+5$; **2)** $4+4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ definita dalla seguente espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} ky^2 & \text{se } \ x \in [-1,1], y \in [0,1], y > |x|; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare k affinché sia la densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y). Trovare inoltre le densità marginali di X e Y.

(ii)Calcolare la densità condizionale di Y dato $\{X = \frac{1}{2}\}$ e $E[Y|X = \frac{1}{2}]$.

(iii) Calcolare $Cov(X,Y)$ e $P(Y \leq 2X)$.

(iv) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U,V), dove $U = X$ e $V = X+Y$. U e V sono indipendenti?

Esercizio 2 Su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sia definita una variabile aleatoria X uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Posto $Y := \ln \frac{1}{X^2}$ calcolare

(i) la densità di Y. Si tratta di una densità nota?
Siano ora $Z_1, ..., Z_{81}$ variabili aleatorie i.i.d. con media E(Y) e varianza Var(Y).

(ii) Calcolare approssimativamente la probabilità che $Z_1 + ... + Z_{81} \in [150, 170]$.

(iii) Calcolare il numero di variabili aleatorie $Z_1, ..., Z_n$ che è necessario sommare affinché $P(Z_1 + ... + Z_n \leq 160) < 0.5$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2022-23

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 16 Giugno 2023

Esercizio 1 (i) Affinché $f(x,y)$ sia una densità deve essere $k>0$.

Ora calcoliamo $\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} y^2 dy$. Si ha:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} y^2 dy = \left(\int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{1} y^2 dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{1} y^2 dy\right) =$$
$$= \int_{-1}^{0} dx \big[y^3/3\big]_{-x}^{1} + \int_{0}^{1} dx \big[y^3/3\big]_{x}^{1} =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} dx(1+x^3) + \int_{0}^{1} dx(1-x^3)\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\big[x+x^4/4\big]_{-1}^{0} + \big[x-x^4/4\big]_{0}^{1}\right] = \frac{1}{3}[1-1/4+1-1/4] = \frac{1}{2}\ .$$

Quindi deve essere $k/2=1$, ovvero $k=2$.

Calcoliamo le densità marginali. Notiamo che $Im(X)=[-1,1]$ e $Im(Y)=[0,1]$. Quindi per $x\in[-1,1]$ si ha

$$f_X(x) = \int_{|x|}^{1} 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3\Big|_{|x|}^{1} = \frac{2}{3}(1-|x|^3);$$

ovvero

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [-1,1]; \\ \frac{2}{3}(1+x^3) & \text{se } x \in [-1,0]; \\ \frac{2}{3}(1-x^3) & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Analogamente per $y\in[0,1]$ si ha

$$f_Y(y) = \int_{-y}^{0} 2y^2 dx + \int_{0}^{y} 2y^2 dx = 4y^3,$$

ovvero

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin [0,1]; \\ 4y^3 & \text{se } y \in [0,1]. \end{cases}$$

(ii) La densità condizionale di Y dato $\{X=\frac{1}{2}\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})} = \begin{cases} 0 & y \notin [\frac{1}{2},1]; \\ \frac{2y^2}{\frac{7}{12}} = \frac{24}{7}y^2 & y \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Pertanto

$$E[Y|X=\frac{1}{2}] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{24}{7}y^3 dy = \frac{6}{7}y^4\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{45}{56}.$$

(iii) Si ha:

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x+x^4)dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}(x-x^4)dx =$$
$$= \frac{2}{3}\left((\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5})\Big|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big|_{0}^{1} \right) = 0.$$

Quindi, otteniamo:

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) =& E(XY) = 2\left(\int_{-1}^{0} xdx \int_{-x}^{1} y^3 dy + \int_{0}^{1} xdx \int_{x}^{1} y^3 dy\right) = \\
=& 2\left(\int_{-1}^{0} x\left(\frac{1}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx + \int_{0}^{1} x\left(\frac{1}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx\right) = \\
=& 2\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^5}{4}\right)dx = 2(\frac{x^2}{8}+\frac{x^6}{24})\Big|_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

per cui le v.a. X e Y non sono correlate pur non essendo stocasticamente indipendenti; d'altra parte, ciò segue anche dal fatto che la densità congiunta di (X,Y) non è uguale al prodotto delle densità marginali.

$$\begin{aligned}
P(Y \le 2X) =& P(Y \le 2X, X \in [-1,0]) + P(Y \le 2X, X \in [0,1]) = \\
=& 0 + \int_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int_{x}^{2x} 2y^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x}^{1} 2y^2 dy = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{14}{3}x^3 + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3}(1-x^3)dx = \\
=& \frac{7}{6}x^4\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} + (\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x^4)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(iv) $(U,V) = \phi(X,Y)$, dove $(u,v) = \phi(x,y) = (x, x+y)$. Applicando il teorema del cambio di variabile si ha:

$$u = x, \; v = x + y$$

la cui inversa è

$$x = u, \; y = v - u,$$

ovvero $\phi^{-1}(u,v) = (u, v-u)$.

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u,v))| = 1$. Pertanto, la densità del vettore (U,V) è:

$$\begin{aligned}
g(u,v) =& f(\phi^{-1}(u,v))|det(J_{\phi^{-1}}(u,v)) = 2(v-u)^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(u)\mathbb{1}_{[|u|,1]}(v-u) = \\
=& 2(v-u)^2 \mathbb{1}_{[-1,0]}(u)\mathbb{1}_{[0,1+u]}(v) + 2(v-u)^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(u)\mathbb{1}_{[2u,1+u]}(v).
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (i) Notiamo che $Im(Y) = [0,+\infty)$. quindi la funzione di ripartizione F_Y di Y è nulla per $x \le 0$ se invece $x \ge 0$

$$F_Y(x) = P\left(\ln \frac{1}{X^2} \le x\right) = P(X^2 \ge e^{-x}) = P(X \ge e^{-\frac{x}{2}}) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

ovvero $Y \sim Exp(\frac{1}{2})$ e quindi $E(Y) = 2$ e $Var(Y) = 4$.

(ii) Sia $S_{81} = Z_1 + \cdots + Z_{81}$ e sia Z una v.a. gaussiana standard.

$$\begin{aligned}
P(150 \le S_{81} \le 170) =& P\left(\frac{150 - 81\times 2}{\sqrt{81\times 4}} \le \frac{S_{81} - 81\times 2}{\sqrt{81\times 4}} \le \frac{170 - 81\times 2}{\sqrt{81\times 4}}\right) \simeq \\
\simeq& P\left(\frac{150 - 81\times 2}{\sqrt{81\times 4}} \le Z \le \frac{170 - 81\times 2}{\sqrt{81\times 4}}\right) = P(-0.67 \le Z \le 0.45) = \\
=& \Phi(0.45) - \Phi(-0.67) = \Phi(0.45) + \Phi(0.67) - 1 = \\
=& 0.67364 + 0.74857 - 1 = 0.422
\end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
P(S_n \leq 160) = &P\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{4n}} \leq \frac{160 - 2n}{\sqrt{4n}}\right) \simeq \\
\simeq &P\left(Z \leq \frac{160 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{160 - 2n}{2\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

n deve quindi essere il più piccolo intero che soddisfa la disuguaglianza

$$
\Phi\left(\frac{160 - 2n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{2}
$$

ovvero

$$
\frac{160 - 2n}{2\sqrt{n}} \leq \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ da cui si ricava } 160 - 2n \leq 0
$$

e questa disuguaglianza vale quando $n \geq 80$. Basta dunque fissare $n = 80$.