Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 10 Giugno 2022
A.A. 2021-2022

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $6+6+6$; **2)** $4+4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+y)^2} & \text{se } \ x \in [0,1], y > 1-x; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre la densità condizionale di Y dato $\{X = \frac{1}{2}\}$.

(ii) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U, V), dove $U = X$ e $V = X + Y$. U e V sono indipendenti?

(iii) Calcolare $P(V \leq 4U)$ e la densità della v.a. $Z = \frac{1}{3}\ln V$, essendo (U, V) il vettore di cui al punto precedente.

Esercizio 2 È noto che un macchinario produce aste di acciaio di lunghezza X (espressa in centimetri) di densità $N(200, 100)$. Le aste di lunghezza minore di 185 cm sono però da scartare perché non idonee. Calcolare

(i) la probabilità p che un'asta scelta a caso sia scartata.

Si scelgono ora n aste a ciascuna delle quale si associa la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-asta è da scartare;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando l'approssimazione normale stimare

(ii) la probabilità che in una produzione di 100 aste ve ne siano non più di 6 da scartare;

(iii) la probabilità che in una produzione di 250 pezzi ve ne siano almeno 235 idonee.

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 10 Giugno 2022

Esercizio 1 (i) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1]; \\ \int_{1-x}^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^2} dy & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Quindi per $x \in [0,1]$ si ha

$$f_X(x) = \int_{1-x}^{+\infty} \frac{1}{(x+y)^2} dy = -\frac{1}{(x+y)}\Big|_{1-x}^{+\infty} = 1,$$

ovvero $X \sim Unif[0,1]$.
Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \int_{1-y}^{1} \frac{1}{(x+y)^2} dx & y \in [0,1]; \\ \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dx & y \geq 1. \end{cases}$$

Quindi per $y \in [0,1]$ si ha

$$f_Y(y) = -\frac{1}{(x+y)}\Big|_{1-y}^{1} = 1 - \frac{1}{1+y}.$$

mentre per $y \geq 1$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{(x+y)}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{y(1+y)}.$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = \frac{1}{2}\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{2}, y)}{f_X(\frac{1}{2})} = \begin{cases} 0 & y < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{(\frac{1}{2}+y)^2} & y \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(ii) $(U,V) = \phi(X,Y)$, dove $(u,v) = \phi(x,y) = (x, x+y)$. Applicando il teorema del cambio di variabile si ha:

$$u = x, \ v = x + y$$

la cui inversa è

$$x = u, \ y = v - u,$$

ovvero $\phi^{-1}(u,v) = (u, v-u)$.
La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u,v))| = 1$. Pertanto, la densità del vettore (U,V) è:

$$g(u,v) = f(\phi^{-1}(u,v))|det(J_{\phi^{-1}}(u,v))| = \begin{cases} \frac{1}{v^2} & \text{se } \ u \in [0,1], v \geq 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcoliamo le densità marginali

$$g_U(u) = \begin{cases} 0 & u \notin [0,1]; \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{v^2} dv = 1 & u \in [0,1]. \end{cases}$$

$$g_V(v) = \begin{cases} 0 & v < 1; \\ \int_0^1 \frac{1}{v^2} du = \frac{1}{v^2} & v \geq 1. \end{cases}$$

U e V sono variabili aleatorie indipendenti dal momento che $g(u,v) = g_U(u)g_V(v)$ per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(iii)

$$\begin{aligned} P(V \leq 4U) = & \int_{\frac{1}{4}}^1 du \int_1^{4u} \frac{1}{v^2} dv = \int_{\frac{1}{4}}^1 (1 - \frac{1}{4u}) du = \\ = & (u - \frac{1}{4} \ln u)\Big|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{3 - \ln 4}{4} \end{aligned}$$

Notiamo che $Im\{Z\} = [0, +\infty)$ e quindi la funzione di ripartizione di Z è nulla per $z \leq 0$. Per $z > 0$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) = & P\left(\frac{1}{3} \ln V \leq z\right) = P\left(V \leq e^{3z}\right) = \\ = & \int_1^{e^{3z}} \frac{1}{v^2} dv = -\frac{1}{v}\Big|_1^{e^{3z}} = 1 - e^{-3z}. \end{aligned}$$

Di conseguenza $Z \sim Exp(3)$.

Esercizio 2 (i) $p = P(X \leq 185) = P\left(\frac{X-200}{10} \leq \frac{185-200}{10}\right) = \Phi(-1.5) =$
$= 1 - \Phi(1.5) \cong 1 - 0.933 = 0.067$

(ii) La sequenza $X_1, ..., X_{100}$ è una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. bernoulliane di parametro p. Indichiamo inoltre con $S_{100} = X_1, ..., X_{100}$, con $\overline{X}_{100} = \frac{S_{100}}{100}$, e con Z una v.a. gaussiana standard.

$$P(S_{100} \leq 6) = P\left(\frac{S_{100} - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \leq \frac{6 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right).$$

Posto $p = 0.067$ si ha quindi

$$P\left(\frac{S_{100} - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \leq \frac{6 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right) = P\left(\frac{S_{100} - 6.7}{2.5} \leq \frac{6 - 6.7}{2.5}\right) \approx P(Z \leq -0,28) =$$

$$= \Phi(-0,28) = 1 - \Phi(0,28) = 1 - 0.61 = 0.39.$$

(iii) L'evento "in una produzione di 250 pezzi ci sono almeno 235 aste idonee" coincide con L'evento "in una produzione di 250 pezzi ci sono al più 15 aste da scartare". Quindi, analogamente al punto precedente si ha

$$P(S_{250} \leq 15) = P\left(\frac{S_{250} - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}} \leq \frac{15 - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}}\right)$$

che, per $p = 0.067$ diventa

$$P\left(\frac{S_{250} - 16,75}{3.95} \leq \frac{15 - 16,75}{3.95}\right) \approx P\left(Z \leq -0.44\right) = 1 - \Phi(0.44) = 1 - 0.67 = 0.33.$$