Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 15 Giugno 2018
A.A. 2017-2018

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $6+6+6$; **2)** $4+4+4$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, \; x > 0, y > 0.$$

(i) Trovare le densità marginali di X e Y. Calcolare inoltre la densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ e $E[Y|X = 1]$.

(ii) Calcolare la legge congiunta del vettore aleatorio (U, V), dove $U = X$ e $V = XY$. U e V sono indipendenti?

(iii) Calcolare la densità della v.a. $Z = \frac{U}{U+V}$ e $P(Z \leq \frac{1}{2}|Z > \frac{1}{4})$, essendo (U, V) il vettore di cui al punto precedente.

Esercizio 2 È noto che il peso X delle mele prodotte in un certo frutteto ha una distribuzione $N(210, 400)$. Sapendo che i frutti con peso minore di 200 sono considerati di seconda scelta, calcolare

(i) la probabilità p che una mela scelta a caso sia di seconda scelta.

Si scelgono ora n mele a ciascuna delle quale si associa la v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima mela è di seconda scelta;} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando l'approssimazione normale stabilita dal teorema limite centrale stimare

(ii) la probabilità che in una cassetta di 200 mele ve ne siano non più di 50 di seconda scelta;

(iii) la probabilità in una cassetta di 250 pezzi ve ne siano almeno 215 di prima scelta.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2017-18

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 15 Giugno 2018

Esercizio 1 (i) Calcoliamo le densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \int_0^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} dy & x \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $x > 0$ si ha

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda xy} dy = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Analogamente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$ si ha

$$f_Y(y) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x(y+1)} dx = \frac{\lambda^2 \Gamma(2)}{(\lambda(y+1))^2} = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

La densità condizionale di Y dato $\{X = 1\}$ ha la seguente espressione

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(y,1)}{f_X(1)} = \begin{cases} 0 & y < 0; \\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(y+1)}}{\lambda e^{-\lambda}} & y \geq 0. \end{cases}$$

Quindi per $y > 0$

$$f_{Y|X}(y|1) = \lambda e^{-\lambda y}$$

ovvero è una densità esponenziale di parametro λ. Di conseguenza $E[Y|X=1] = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Cominciamo col calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio $(X, XY) = \phi(X,Y)$, ove $(u,v) = \phi(x,y) = (x, xy)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x, \ v = xy$$

e

$$x = u, \ y = \frac{v}{u},$$

ovvero $\phi^{-1}(u,v) = (u, v/u)$.

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u,v))| = 1/u$. Pertanto, la densità del vettore (X, XY) è:

$$g(u,v) = \lambda^2 u e^{-\lambda u(\frac{v}{u}+1)} \cdot \frac{1}{u} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u,v) = \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda v}$$

le due v.a. X e XY sono indipendenti esponenziali di parametro λ.

(iii) Notiamo intanto che $Im\{Z\} = [0,1]$ e quindi la funzione di ripartizione di Z è nulla per $z \leq 0$ ed è 1 per $z \geq 1$. Per $z \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) =& P\left(\frac{U}{U+V} \leq z\right) = P\left(V \geq \frac{(1-z)}{z} U\right) = \\ =& \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \int_{\frac{(1-z)}{z}u}^{\infty} \lambda e^{-\lambda v} dv = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} e^{-\lambda \frac{(1-z)}{z} u} du = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \frac{u}{z}} du = z. \end{aligned}$$

Di conseguenza Z è uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,1]$.
Infine

$$P\left(Z \leq \frac{1}{2} | Z > \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z > \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 2 (i) $p = P(X \leq 200) = P\left(\frac{X-210}{20} \leq \frac{200-210}{20}\right) = \Phi(-0.5) =$
$= 1 - \Phi(0.5) \cong 1 - 0.69 = 0.31$

(ii) La sequenza $X_1, ..., X_{200}$ è una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. bernoulliane di parametro p. Indichiamo inoltre con $S_{200} = X_1, ..., X_{200}$, con $\overline{X}_{200} = \frac{S_{200}}{200}$, e con X una v.a. gaussiana standard.

$$P(S_{200} \leq 50) = P\left(\frac{S_{200} - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}} \leq \frac{50 - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}}\right).$$

Posto $p = 0.31$ si ha quindi

$$P\left(\frac{S_{200} - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}} \leq \frac{50 - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}}\right) = P\left(\frac{S_{200} - 62}{6.54} \leq \frac{50 - 62}{6.54}\right) \approx P(X \leq -1.835) =$$

$$= \Phi(-1.835) = 1 - \Phi(1.835) = 1 - 0.966 = 0.034.$$

(iii) L'evento "in una cassetta di 250 pezzi ci sono almeno 215 mele di prima scelta" coincide con L'evento "in una cassetta di 250 pezzi ci sono al più 35 mele di seconda scelta". Quindi, analogamente al punto precedente si ha

$$P(S_{250} \leq 35) = P\left(\frac{S_{250} - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}} \leq \frac{35 - 250p}{\sqrt{250p(1-p)}}\right)$$

che, per $p = 0.31$ diventa

$$P\left(\frac{S_{250} - 77.5}{7.31} \leq \frac{35 - 77.5}{7.31}\right) \approx P(X \leq -5.81) \cong 0.$$