Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Seconda prova di valutazione in itinere - 27 Giugno 2017
A.A. 2016-2017

Durata della prova 2.5 h
Punteggi: 1) $4+4+3$; **2)** $4+4+4$; **3)** $4+3$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Sia dato un parametro $a > 0$. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{se } \ x \in [0, a]; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare a affinché $f(x)$ sia la densità di una variabile aleatoria continua X;

(ii) Si ricavi la funzione di ripartizione F di X e se ne determini il quantile di ordine $\frac{1}{2}$. Calcolare inoltre $P\left(X > \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{4}\right)$.

(iii) Trovare la densità di $Y = 1 - X$; quanto valgono $E(X)$ e $E(1-X)$?

Esercizio 2 Si consideri il vettore aleatorio (X, Y) con densità congiunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}, \text{ se } \ x > 0, y > 0; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Trovare le densità delle variabili aleatorie marginali X e Y.

(ii) Calcolare la densità condizionale di Y dato $X = 1$ e $P(Y \leq 2 | X = 1)$.

(iii) Calcolare la legge del vettore aleatorio $(X, Z) = \left(X, \frac{X}{Y}\right)$ e $Cov(X, Z)$.

Esercizio 3 Una ditta produce punte da trapano. Si provano n punte dello stesso diametro producendo n fori. Si indichino con $X_1, \ldots, X_n$ i diametri dei fori prodotti e si supponga che le v.a. X_i siano normali con media μ incognita e varianza $\sigma^2 = 10^{-2}\ mm^2$.

(i) Se $n = 100$, supponiamo che la media campionaria sia $\bar{X}_{100} = \frac{1}{100}(X_1 + \cdots + X_{100}) = 5\ mm$; calcolare un intervallo di confidenza a livello $1 - \alpha = 0.95$ per la media μ.

(ii) Quanto grande occorre prendere l'ampiezza n del campione affinché con confidenza 95% la stima di μ abbia precisione $10^{-2}\ mm$?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2016-17

Soluzioni della seconda prova di valutazione in itinere - 27 Giugno 2017

Esercizio 1 (i) Affinché f sia una densità si deve imporre $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 1$. Nel caso specifico,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \begin{cases} \int_0^a (1-x)\ dx \text{ se } a \in [0,1]; \\ \int_0^1 (1-x)\ dx + \int_1^a (x-1)\ dx \text{ se } a \geq 1. \end{cases}$$

Se $a \in [0,1]$ l'equazione non ammette soluzioni; per $a > 1$ si ottiene

$$\int_0^1 (1-x)\ dx + \int_1^a (x-1)\ dx = 1 \text{ se e solo se } a = 2.$$

$a = 2$ è quindi il valore cercato.

(ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ \int_0^x (1-u)\ du & \text{se } x \in [0,1]; \\ \int_0^1 (1-u)\ dx + \int_1^x (u-1)\ du & \text{se } x \in [1,2]; \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0,1]; \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 & \text{se } x \in [1,2]; \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Poiché $F(1) = \frac{1}{2}$ allora il quantile cercato coincide con 1.

Applicando la definizione di probabilità condizionata si ha inoltre:

$$P\left(X > \frac{1}{2} | X \leq \frac{3}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)}{P\left(X \leq \frac{3}{4}\right)} = \frac{F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)}{F\left(\frac{3}{4}\right)} = \cdots = \frac{1}{5}$$

(iii) Ricordando la formula per la densità di una trasformazione lineare, se $Y = 1 - X$, la densità di Y è, per $y \in (-1,1)$:

$$f_Y(y) = f_X(1-y) = |1 - 1 + y| I_{[0,2]}(1-y) = |y| I_{[-1,1]}(y).$$

Calcoliamo prima $E(1-X)$.

$$E(1-X) = E(Y) = \int_{-1}^1 y|y|\ dy = 0,$$

perché la funzione integranda è dispari. Allora $0 = 1 - E(X)$, da cui segue $E(X) = 1$.

Esercizio 2 (i)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0; \\ \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\ dy = e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0; \\ \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\ dx = \frac{2}{(y+1)^3} & \text{se } y \geq 0. \end{cases}$$

Infatti

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)}\ dy = e^{-x} \int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}}\ dy$$

e posto $u = \frac{1}{y}$ si ottiene $\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}} \ dy = \int_0^\infty x^2 u e^{-ux} \ du = 1$ perché è l'integrale una densità $\Gamma(2, x)$. Inoltre

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}(y+1)} \ dx = \frac{1}{y^3} \frac{2}{\left(\frac{y+1}{y}\right)^3} \int_0^\infty \left(\frac{y+1}{y}\right)^3 \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{x}{y}(y+1)} \ dx = \frac{2}{(y+1)^3}$$

perché l'integrale è l'integrale di una densità $\Gamma(3, \frac{y+1}{y})$.

(ii) Risulta facilmente

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \frac{y^{-3} e^{-(y+1)/y} I_{(0,+\infty)}(y)}{e^{-1}} = y^{-3} e^{-1/y} I_{(0,+\infty)}(y).$$

Inoltre

$$P(Y \le 2 | X = 1) = \int_0^2 y^{-3} e^{-1/y} \ dy.$$

Calcolando l'integrale con la sostituzione $s = 1/y$, si ottiene infine

$$P(Y \le 2 | X = 1) = \int_{1/2}^{+\infty} s e^{-s} ds = \frac{3}{2} e^{-1/2}.$$

(iii) Calcoliamo la densità congiunta del vettore aleaotorio $(X, X/Y) = \phi(X, Y)$, ove $(u, v) = \phi(x, y) = (x, x/y)$. Applicando il cambio di variabili, si ha:

$$u = x, \ \ v = \frac{x}{y}$$

e

$$x = u, \ \ y = \frac{u}{v},$$

ovvero $\phi^{-1}(u, v) = (u, u/v)$ (si noti che $\phi = \phi^{-1}$).

La matrice Jacobiana di ϕ^{-1} è:

$$J_{\phi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{pmatrix}$$

e $|det(J_{\phi^{-1}}(u, v))| = u/v^2$. Pertanto, la densità del vettore $(X, X/Y)$ è:

$$g(u, v) = \frac{u^2 v^3}{u^3} \cdot \frac{u}{v^2} \exp\left(-v(u/v + 1)\right) = v e^{-(u+v)}$$

Poiché si può scrivere

$$g(u, v) = e^{-u} \cdot v e^{-v}$$

le due v.a. X e X/Y sono indipendenti e si vede subito che X è esponenziale di parametro 1, mentre X/Y ha legge $\Gamma(2, 1)$.

Di conseguenza $cov(X, X/Y) = 0$.

Esercizio 3 (i) Un intervallo I di confidenza a livello $1 - \alpha$ per la media incognita di una distribuzione avente varianza σ^2, è:

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2}\right] \qquad (*)$$

dove $\bar{x}$ è la media campionaria, e ϕ_β è il quantile della Gaussiana standard, tale che $\Phi(\phi_\beta) = \beta$. Nel caso in esame, si ha $n = 100$, $\bar{x} = 5$ e $\sigma = 1/10$. Da $1 - \alpha = 0.95$ segue $1 - \alpha/2 = 0.975$, e quindi dalla tavola dei valori di Φ si ricava $\phi_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Sostituendo in $(*)$, si ottiene l'intervallo $I = (4.98,\ 5.02)$.

(ii) Per soddisfare la condizione di precisione richiesta, l'ampiezza dell'intervallo fornito al punto (i) deve essere inferiore a $2 \cdot 10^{-2}$; pertanto deve essere

$$2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\alpha/2} \leq 2 \cdot 10^{-2},$$

ovvero $n \geq 10^4 \cdot (1.96)^2 \cdot 10^{-2} = 384.16$, e quindi occorre prendere $n \geq 385$.