Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica A.A. 2018/19
Processi stocastici e analisi di serie temporali

PROVA DI ESONERO SUI PROCESSI DI MARKOV
DEL 3 DICEMBRE 2018

Punteggi: **1**: 2×5; **2**: 3×3.33; **3**: 3×3.33; totale $= 30$.

Esercizio 1. Per $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, si consideri la matrice

$$P_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 2\alpha - \gamma \\ 0 & \beta & \beta \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Trovare i valori di α, β e γ per cui $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ risulta una matrice stocastica.
Per i valori trovati, sia X_n la CM a tempo discreto ed omogenea su $E = \{1, 2, 3\}$, con matrice delle probabilità di transizione $P_{\alpha,\beta,\gamma}$.
(i) Trovare il valore di γ per cui lo stato 1 è assorbente e, per tale valore di γ, calcolare i tempi medi di assorbimento nello stato 1, partendo da $i \in \{2, 3\}$.
(ii) Se $\gamma = 1/3$, classificare gli stati della CM e trovare eventuali stati periodici, specificandone il periodo.
(a) Trovare la/e distribuzione/i invariante/i e la distribuzione stazionaria, se esiste. Nel caso, si tratta di una distribuzione reversibile?
(b) Calcolare il minimo intero n per cui:

$$|p_{13}^{(n)} - \frac{1}{2}| < 10^{-3}.$$

(c) Verificare che il tempo medio di primo ritorno nello stato 3 è la metà del tempo medio di primo ritorno in 1.
(d) Stimare approssimativamente il valore della frazione

$$\frac{P(X_{5024} = 3)}{P(X_{5024} = 1)},$$

e, per n grande, stimare

$$P(X_{2^n+1} = 2,\ X_{2^n+3} = 2).$$

Esercizio 2. (i) Si consideri un processo di nascita e morte $X(t)$ con tasso di nascita λ_n e tasso di morte μ_n; supponiamo che per ogni $n \geq 0$ sia $\lambda_n/\mu_n = \rho < 1$, e che la probabilità che all'equilibrio il sistema si trovi nello stato 0 sia $\pi_0 = P(X(\infty) = 0) = 1/3$. Calcolare $P(X(\infty) \geq 3)$.
(ii) Si consideri una coda $M/M/n$ con $n \geq 2$ (incognito), dove gli arrivi avvengono in accordo con un processo di Poisson N_t con intensità λ e il tempo di servizio ha distribuzione esponenziale di parametro μ. Sia $X(t)$ il numero di clienti presenti nel sistema al tempo $t \geq 0$. Si supponga che $\lambda = \mu$, che il tempo medio che un cliente trascorre nel sistema in condizioni stazionarie sia $W = \frac{2}{3}$, e che la probabilità che il sistema sia nello stato n all'equilibrio sia $\pi_n = 1/6$.

(a) Trovare il minimo numero di serventi n per cui valgono le condizioni di sopra e calcolare $\pi_4 = P(X(\infty) = 4)$.
(b) Calcolare il numero medio L dei clienti nel sistema, il numero medio L_c dei clienti in coda e il tempo medio di attesa in coda W_c, in regime stazionario.

Esercizio 3. Si consideri la CM $X(t)$ a tempo continuo, omogenea, con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$, avente per generatore la matrice Q (da determinare). Si consideri inoltre la CM $\widehat{X}_n$ a tempo discreto, accelerata, ottenuta da $X(t)$ trascurando i tempi di permanenza negli stati, avente per matrice delle probabilità di transizione:

$$\widehat{P}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1-\beta \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \beta & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \in (0, 1).$$

(i) Trovare la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ di $\widehat{X}(t)$, se esiste.
(ii) Determinare, al variare di β, il generatore Q della CM $X(t)$ in modo che il tempo di permanenza nello stato 1 abbia distribuzione esponenziale di parametro 2, e inoltre, supposto che esista, la distribuzione stazionaria π di $X(t)$ coincida con la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$ di $\widehat{X}_n$.
(iii) Per $\beta = 1/3$, calcolare approssimativamente $P(0.1)$.

Processi stocastici e analisi di serie temporali a.a. 2018/19
Soluzioni della prova di esonero del 3 dicembre 2018

1. Affinché $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ sia stocastica, deve essere $\alpha = \beta = 1/2$ e $\gamma \in [0, 1]$, avendosi quindi

$$P_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 1-\gamma \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

(i) Se $\gamma = 1$ risulta $p_{11} = 1$ e lo stato 1 è assorbente, mentre gli stati 2 e 3 sono transitori. Infatti, la CM può transire da 2 a 3 e poi in 1, per cui non ritorna più in 2, essendo 1 assorbente. Analoga cosa accade per lo stato 3.
I tempi medi η_i di assorbimento nello stato 1, partendo dallo stato transitorio $i \in \{2, 3\}$ sono soluzioni del sistema di equazioni:

$$\eta_i = 1 + \sum_{j=2}^{3} p_{ij}\eta_j, \; i = 2, 3$$

ovvero:

$$\begin{cases} \eta_2 = 1 + \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 \\ \eta_3 = 1 + \frac{1}{4}\eta_2 + \frac{5}{12}\eta_3 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\eta_2 = 13/2$ e $\eta_3 = 9/2$.
(ii) Se $\gamma = 1/3$, la matrice diventa:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Gli stati sono tutti ricorrenti e formano un'unica classe di stati comunicanti. Non esistono stati periodici, in quanto, ad esempio, $P^2 > 0$ e $P^3 > 0$ e quindi MCD $\{2, 3\} = 1$.
(a) Risolvendo l'equazione $\pi P = \pi$, si trova che $\pi = \left(\frac{1}{4}\, , \frac{1}{4}\, , \frac{1}{2}\right)$ è invariante. Visto che $P^2 > 0$, π è anche stazionaria. Poiché risulta $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$, la distribuzione stazionaria è reversibile.
(b) Dalla dimostrazione del Teorema Ergodico, si ha:

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq 2\beta^{n-s},$$

dove s è l'intero per cui $P^s > 0$, α è il minimo degli elementi della matrice P^s e $\beta = (1-\alpha)^{1/s}$. In questo caso $s = 2$, $\alpha = 0.167$, come si vede facilmente calcolando P^2; pertanto $\beta = 0.9126$. Allora, si ottiene $|p_{13}^{(n)} - 1/2| \leq 2 \cdot (0.9126)^{n-2}$; imponendo la condizione che questa quantità sia minore di 10^{-3}, e passando al logaritmo, si ottiene $\ln 2 + (n-2)\ln(0.9126) < -3 \ln 10$ che fornisce $n \geq 84$. La convergenza della CM verso la stazionarietà è piuttosto lenta, poiché α è piuttosto piccola; ciò si vede anche calcolando il secondo autovalore $\lambda_2 = 0.439$, che è piuttosto grande.
(c) I tempi medi T_i di primo ritorno nello stato i sono dati da $T_i = 1/\pi_i$, per cui $T_1 = T_2 = 4$ e $T_3 = 2$. Pertanto T_3 è la metà di T_1.
(d) Risulta

$$\frac{P(X_{5024} = 3)}{P(X_{5024} = 1)} \simeq \frac{\pi_3}{\pi_1} = 2$$

Inoltre:

$$P(X_{2^n+1} = 2,\ X_{2^n+3} = 2) = P(X_{2^n+3} = 2 | X_{2^n+1} = 2) P(X_{2^n+1} = 2)$$

che, per l'omogeneità, se n è grande vale approssimativamente $p_{22}^{(2)} \pi_2 = 0.375 \cdot \frac{1}{4} = 0.093$

2. (i) Siccome $\lambda_n / \mu_n = \rho < 1$ è costante, si ottiene dalla teoria che la distribuzione stazionaria è data da:

$$\pi_k = \rho^k (1 - \rho),\ k = 0, 1, \ldots,\ \text{con}\ \ \pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1 - \rho} \right)^{-1} = 1 - \rho.$$

Imponendo che $\pi_0 = 1 - \rho$ sia uguale a $1/3$, si ottiene $\rho = 2/3$. Dunque:

$$P(X(\infty) \geq 3) = 1 - P(X(\infty) = 0) - P(X(\infty) = 1) - P(X(\infty) = 2)$$

$$= 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 = 1 - (1 - 2/3)(1 + 2/3 + 4/9) = \frac{8}{27}\ .$$

(ii) Ricordiamo le formule valevoli per una coda M/M/n, con $\rho = \lambda / \mu < n$:

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\pi_0}{k!} \rho^k, & k \leq n \\ \frac{\pi_0 \rho^k}{n! n^{k-n}}, & k \geq n + 1 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} \Big]^{-1}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} \Big[\frac{\pi_0 \rho^{n+1}}{(n-1)!(n - \rho)^2} \Big].$$

Occorre trovare n in modo che sia $\pi_n = 1/6$, ovvero $\pi_0 / n! = 1/6$, e dunque $\pi_0 = n!/6$. Siccome $\lambda = \mu$, risulta $\rho = 1$ e quindi $\pi_0 = \Big[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!(n-1)} \Big]^{-1}$. Cerchiamo $n \geq 2$ per tentativi, uguagliando l'espressione di sopra per π_0 a $n!/6$.

Per $n = 2$, si ha $\pi_0 = (1 + 1 + 1/2 + 1/2)^{-1} = 1/3$, che uguaglia $2!/6$ mentre, per esempio, per $n = 3$, risulta $\pi_0 = (1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/(6 \cdot 2))^{-1} = 12/39$, che è diverso da $3!/6 = 1$. Dunque, abbiamo trovato che il minimo numero di serventi per cui sono soddisfatte le condizioni richieste è $n = 2$ e $\pi_0 = 1/3$. Allora

$$\pi_4 = \frac{1}{2! 2^{(4-2)}} \pi_0 = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

Inoltre, siccome $\lambda = \mu$:

$$W = \frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{1/3}{(2-1)!(2-1)^2} \right] = \frac{4}{3\lambda}.$$

Imponendo che $W = 2/3$, si trova infine $\lambda = \mu = 2$.

Pertanto, si ottiene:

$$L = \lambda W = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

$$W_c = W - 1/\mu = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$L_c = \lambda W_c = \frac{1}{3}.$$

3. (i) La matrice $\widehat{P}$ è bistocastica; siccome $\widehat{P}^2 > 0$, la CM $\widehat{X}_n$ è regolare, quindi per il Teorema Ergodico esiste la distribuzione stazionaria $\widehat{\pi}$, ed è quella uniforme sugli stati, ovvero $\widehat{\pi} = (1/3, 1/3, 1/3)$.
(ii) Deve essere

$$\widehat{P}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -q_{12}/q_{11} & -q_{13}/q_{11} \\ -q_{21}/q_{22} & 0 & -q_{23}/q_{22} \\ -q_{31}/q_{33} & -q_{32}/q_{33} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1-\beta \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \beta & 1-\beta & 0 \end{pmatrix}, \ \beta \in (0,1)$$

da cui segue che

$$q_{12} = -\beta q_{11}, \ q_{13} = -(1-\beta) q_{11}, \ q_{21} = -(1-\beta) q_{22},$$
$$q_{23} = -\beta q_{22}, \ q_{31} = -\beta q_{33}, \ q_{32} = -(1-\beta) q_{33}.$$

Se, come richiesto, deve essere $q_{11} = -2$ e inoltre $X(t)$ e $\widehat{X}_n$ devono avere lo stesso comportamento all'equilibrio, ovvero i tempi medi di permanenza nei vari stati sono tutti uguali ($q_{11} = q_{22} = q_{33}$), si ottiene

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2\beta & 2(1-\beta) \\ 2(1-\beta) & -2 & 2\beta \\ 2\beta & 2(1-\beta) & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Si ha $P(h) = Id + hQ + o(h)$, per $h \to 0^+$, pertanto per $\beta = 1/3$, risulta:

$$P(0.1) \approx Id + 0.1 \cdot Q$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -2 & 2/3 & 4/3 \\ 4/3 & -2 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/15 & 2/15 \\ 2/15 & 4/5 & 1/15 \\ 1/15 & 2/15 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Dal fatto che $P(h) > 0$, per $h > 0$ piccolo, segue ad esempio che $P(1) > 0$, per cui esiste la distribuzione stazionaria per la CM $X(t)$. L' esistenza della distribuzione stazionaria π si poteva anche dedurre dal fatto che, per $\beta = 1/3$ gli autovalori non zero di Q sono: $\gamma_2 = -3 - 0.5773503\ i, \ \gamma_3 = -3 + 0.5773503\ i$, quindi la loro parte reale, -3, è negativa.