FACOLTÀ DI INGEGNERIA
PROBABILITÀ E STATISTICA
INGEGNERIA CIVILE E A&T E INFORMATICA

PRIMA PROVA DI VALUTAZIONE IN ITINERE - 28 APRILE 2025
A.A. 2024-2025

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $3+4+5+4$; **2)** $4+5+5$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Da una scatola contenente 2 palline bianche e 3 rosse si effettuano 3 estrazioni senza reinserimento.

(i) Trovare la probabilità, diciamo θ, di ottenere esattamente 2 palline rosse.

Posto $p = \frac{5}{9} \cdot \theta$, sia T una v.a. tale che $T-1$ ha distribuzione geometrica di parametro p. Sia invece S il numero di lanci necessari ad ottenere *Testa* per la prima volta, lanciando una moneta truccata, per la quale in ogni lancio esce *Testa* con probabilità $\frac{2}{3}$. Nell'ipotesi che T ed S siano v.a. stocasticamente indipendenti

(ii) Scrivere le densità discrete di T ed S e calcolare $Cov(4T+S, 2S-T)$ $E(2T^2-4S)$.

(iii) Calcolare $P(T-5S<0)$ e $P(\min(T,S)=2)$.

(iv) Si lancia ora un'altra moneta truccata in modo che in ogni lancio esca *Testa* con probabilità $1.2 \cdot 10^{-3}$. Se si effettuano 3000 lanci, stimare la probabilità che il numero di volte che esce *Testa* sia ≥ 4.

Esercizio 2 Si consideri la v.a. bidimensionale discreta (X,Y) a valori in $\{-1,0,1\} \times \{1,2,3,4\}$, la cui densità discreta congiunta è riportata nella seguente tabella:

X/Y	1	2	3	4
-1	0.1	0.12	0.08	0
0	0.15	0.1	0	0
1	0	0.1	0.15	0.2

(i) Trovare le densità marginali di X e di Y. Si tratta di densità note ?

(ii) Calcolare la densità della variabile aleatoria $Z = XY$ e $cov(X,Y)$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

(iii) Trovare la densità condizionale e il valore medio condizionale di Y dato $X=-1$.

Probabilità e Statistica, a.a. 2024-25

Soluzioni della prima prova di valutazione in itinere - 28 Aprile 2025

Esercizio 1 (i) Se X denota il numero delle palline rosse ottenute in 3 estrazioni senza rimpiazzo, allora X è una v.a. ipergeometrica di parametri $(3,3,2)$. Dunque, per $k = 0,1,2,3$:

$$P(X=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$$

Quindi

$$\theta = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5} \,.$$

(ii) Risulta $p = \frac{5}{9} \cdot \theta = \frac{1}{3}$, quindi T ha densità geometrica modificata di parametro $1/3$. Pertanto

$$P(T=k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, k = 1,2,\dots$$

La v.a. S rappresenta l'istante di primo successo in una sequenza di prove indipendenti e di Bernoulli in ciascuna delle quali la probabilità del successo vale $\frac{2}{3}$. Dunque si ha:

$$P(S=h) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}, h = 1,2,\dots$$

Inoltre $E(T) = (\frac{1}{3})^{-1} = 3$, $Var(T) = \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 6$, $E(S) = (\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$ e $Var(S) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$. Pertanto, essendo T ed S indipendenti risulta

$$\begin{aligned} Cov(4T+S, 2S-T) &= 8cov(T,S) - 4Var(T) + 2Var(S) - Cov(T,S) = -4 \times 6 + 2 \times \frac{3}{4} = -\frac{45}{2}, \\ E(2T^2 - 4S) &= 2E(T^2) - 4E(S) = 2(Var(T) + E(T)^2) - 4 \times \frac{3}{2} = 2\,(6+9) - 6 = 24. \end{aligned}$$

(iii) Si ha $P(T - 5S < 0) = 1 - P(T - 5S \geq 0)$; calcoliamo prima $P(T \geq 5S)$. Risulta:

$$P(T \geq 5S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 5k, S = k)$$

e per l'indipendenza di T ed S, tale probabilità è

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq 5k) P(S = k)$$

Ricordando che per una v.a. $X \sim Geom(p)$ risulta $P(X \geq h) = (1-p)^h$, siccome $T - 1$ è geometrica di parametro $\frac{1}{3}$, si ottiene $P(T \geq 5k) = P(T - 1 \geq 5k - 1) = (1 - 1/3)^{5k-1}$. Riprendendo il calcolo di prima:

$$P(T \geq 5S) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{5k-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = ... = 3\left(\frac{1}{1 - 2^5/3^6} - 1\right) = 0.1377\ .$$

ed infine $P(T-5S<0) = 1 - P(T \geq 5S) = 1 - 0.1377 = 0.8623$.

Si ha poi:

$$P(\min(T,S) \geq k) = P(T \geq k)P(S \geq k) = [(1-1/3)(1-2/3)]^{k-1} = (2/9)^{k-1}$$

Allora:

$$P(\min(T,S) = k) = P(\min(T,S) \geq k) - P(\min(T,S) \geq k+1) =$$

$$= (2/9)^{k-1} - (2/9)^k = \frac{7}{9}\left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}$$

e per $k=2$ tale probabilità vale $\frac{14}{81}$.

(iv) Il numero Z di *Teste* uscite in 3000 lanci della moneta ha distribuzione binomiale di parametri $(3000, 1.2 \cdot 10^{-3})$. Siccome la probabilità del successo in ogni prova è molto piccola $(1.2 \cdot 10^{-3})$, possiamo usare l'approssimazione di Poisson, ottenendo cosi' $P(Z=k) \approx P(Y=k)$, dove Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = np = 3000 \cdot 1.2 \cdot 10^{-3} = 3.6$. Pertanto, siccome $P(Y=k) = e^{-3.6}(3.6)^k/k!, k = 0,1,...$, si ottiene

$$P(Z \geq 4) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=2) - P(Z=3)$$

$$\approx 1 - e^{-3.6}(1 + 3.6 + (3.6)^2/2 + (3.6)^3/6) = 0.4847$$

Esercizio 2 (i) La densità marginale della X è data da

$$\sum_{y=1}^{4} p(x,y);$$

effettuando i calcoli si trova:

$$p_X(-1) = 0.3; \; p_X(0) = 0.25; \; p_X(1) = 0.45 \; .$$

La densità marginale della Y è data da

$$\sum_{x=-1}^{1} p(x,y);$$

effettuando i calcoli si trova:

$$p_Y(1) = 0.25; \; p_Y(2) = 0.32; \; p_Y(3) = 0.23; \; p_Y(4) = 0.2 \; .$$

Non si tratta di densità note.

(ii) Si ha:

$$E(X) = -1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 = 0.15$$

$$E(Y) = 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.32 + 3 \cdot 0.23 + 4 \cdot 0.2 = 2.38$$

$Z = XY$ assume valori in $\{-3,-2,-1,0,2,3,4\}$; la sua distribuzione, dedotta dalla densità congiunta di (X,Y), è riportata nella tabella seguente:

$Z = XY$	-3	-2	-1	0	2	3	4
p_Z	0.08	0.12	0.1	0.25	0.1	0.15	0.2

Quindi:

$$E(XY) = -0.1 - 2 \cdot 0.12 - 3 \cdot 0.08 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.2 = 0.87$$

Pertanto:

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.87 - 0.15 \cdot 2.38 = 0.513 \ .$$

Le v.a. X e Y non sono indipendenti, poiché $cov(X, Y) \neq 0$; ciò si deduce anche dal fatto che $p(x, y) \neq p_X(x)p_Y(y)$.

Infatti, si ha per esempio

$$0.1 = p(-1, 1) \neq p_X(-1)p_Y(1) = 0.3 \cdot 0.25 = 0.075 \ .$$

(iii) Si ha:

$$\begin{aligned}
P(Y = 1|X = -1) =& \frac{p(-1, 1)}{p_X(-1)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} = 0.\bar{3};\\
P(Y = 2|X = -1) =& \frac{p(-1, 2)}{p_X(-1)} = \frac{0.12}{0.3} = 0.4;\\
P(Y = 3|X = -1) =& \frac{p(-1, 3)}{p_X(-1)} = \frac{0.08}{0.3} = \frac{8}{30} = 0.2\bar{6};\\
P(Y = 4|X = -1) =& \frac{p(-1, 4)}{p_X(-1)} = \frac{0}{0.3} = 0.
\end{aligned}$$

e quindi

$$E[Y|X = -1] = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{8}{30} = \frac{29}{15} = 1.9\bar{3} \ .$$