FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
INGEGNERIA CIVILE E A&T E INFORMATICA

PRIMA PROVA DI VALUTAZIONE IN ITINERE - 6 MAGGIO 2024
A.A. 2023-2024

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $4+4+4+6$; **2)** $5+4+3$.

Totale = 30.

Esercizio 1 In una azienda che produce pen drive risulta che il 3% della produzione presenta delle imperfezioni. Per questo motivo le pen drive vengono sottoposte ad una procedura di controllo, in seguito alla quale i pezzi difettosi vengono scartati con probabilità del 95%, ma anche i pezzi non difettosi vengono scartati con probabilità 2%.

(i) Qual è la probabilità che una pen drive prodotta superi il controllo e venga messa in commercio?

(ii) Qual è la probabilità che una pen drive scartata sia invece priva di imperfezioni?

(iii) Qual è la probabilità che una pen drive messa in commercio sia difettosa?

(iv) Si lanciano contemporaneamente e ripetutamente una moneta ed un dado equilibrati. Sia T il numero minimo di lanci della moneta affinché si ottenga Testa e sia S il numero minimo di lanci del dado per ottenere un punto ≤ 4.

(a) Qual è la densità discreta di T? e di S? Trovare $E(T^2)$ e $E(S^2)$.

(b) Trovare la legge di $W = \min(T, S)$ e calcolare $P(T + S = 5)$.

Esercizio 2 Si consideri la v.a. bidimensionale discreta (X, Y) a valori in $\{0,1\} \times \{0,1\}$, la cui densità discreta è:

$$p(n,m) = \frac{1}{2} + nm - \frac{n}{2} - \frac{m}{2}, \ n, m \in \{0,1\}.$$

(i) Trovare le densità marginali di X e di Y. Si tratta di densità note ? Calcolare la densità condizionale $p_{X|Y}$ quando $Y = 0$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

(ii) Calcolare $E(X),\ E(Y),\ E(X^2),\ E(Y^2)$ e $cov(X, Y)$.

(iii) Detta $Z = \max(X, Y)$, trovare la densità discreta di Z e calcolarne media e varianza.

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2023-24

Soluzioni della prima prova di valutazione in itinere - 6 Maggio 2024

Esercizio 1 Indichiamo con D l'evento che una pen drive scelta a caso sia difettosa e con D^C quello che non sia difettosa. Inoltre sia S l'evento che una pen drive venga scartata ed S^C l'evento che essa invece superi il controllo e venga messa in commercio.

(i) Si ha:

$$P(S^c) = P(S^c \cap D) + P(S^c \cap D^c) = P(S^c|D)P(D) + P(S^c|D^c)P(D^c).$$

Inserendo i dati, si ottiene:

$$P(S^c) = 0.05 \cdot 0.03 + 0.98 \cdot 0.97 = 0.952 \ .$$

(ii) Per il teorema di Bayes:

$$P(D^c|S) = \frac{P(S|D^c)P(D^c)}{P(S|D^c)P(D^c) + P(S|D)P(D)} \ .$$

Sostituendo le probabilità note, si ottiene:

$$P(D^c|S) = \frac{0.02 \cdot 0.97}{0.02 \cdot 0.97 + 0.95 \cdot 0.03} = 0.405 \ .$$

(iii) Sempre per il teorema di Bayes:

$$P(D|S^c) = \frac{P(S^c|D)P(D)}{P(S^c|D)P(D) + P(S^c|D^c)P(D^C)} \ .$$

Sostituendo le probabilità note, si ottiene:

$$P(D^c|S) = \frac{0.05 \cdot 0.03}{0.05 \cdot 0.03 + 0.98 \cdot 0.97} = 0.0015 \ .$$

(iv) T è l'istante di primo successo in una serie di prove indipendenti e Bernoulliane, in ciascuna delle quali la probabilità del successo (cioé che esca Testa) è $p = \frac{1}{2}$; S è l'istante di primo successo in una serie di prove indipendenti e Bernoulliane, in ciascuna delle quali la probabilità del successo (cioé che esca un punteggio ≤ 4) è $p' = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Dunque, per $k = 1, 2, \dots,$ si ha:

$$P(T = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}; \quad P(S = k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Inoltre $E(T) = \frac{1}{p} = 2, \ E(S) = \frac{1}{p'} = \frac{3}{2}$.

Inoltre $Var(T) = (1-p)/p^2$ e quindi $E(T^2) = Var(T) + E^2(T) = (2-p)/p^2 = 6$. Analogamente $E(S^2) = Var(S) + E^2(S) = (2-p')/p'^2 = 3$.

(b) Siccome T e S sono indipendenti, per $k = 1, 2, \cdots$:

$$P(W > k) = P(T > k) \cdot P(S > k) = (1-p)^k(1-p')^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(\frac{1}{6}\right)^{k}.$$

Quindi:

$$P(W = k) = P(W > k-1) - P(W > k) = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

Pertanto W è una v.a. Geometrica modificata di parametro $p'' = \frac{5}{6}$, e quindi $E(W) = \frac{1}{p''} = \frac{6}{5}$.

(c) Si ha:

$$P(T+S=5) =$$

$$= P(T=2,S=3) + P(T=3,S=2) + P(T=1,S=4) + P(T=4,S=1) =$$

$$= P(T=2)P(S=3) + P(T=3)P(S=2) +$$

$$+ P(T=1)P(S=4) + P(T=4)P(S=1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{65}{648} = 0.1003 \ .$$

Esercizio 2 (i) La densità marginale di X è, per $n \in \{0,1\}$:

$$p_X(n) = \sum_{m=0}^{1} p(n,m) = \sum_{m=0}^{1}\left(\frac{1}{2} + nm - \frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \ n = 0,1,$$

per cui X è una v.a. di Bernoulli di parametro $1/2$, cioé uniforme in $\{0,1\}$.

Analogamente la densità marginale di Y è, per $m \in \{0,1\}$:

$$p_Y(m) = \sum_{n=0}^{1} p(n,m) = \sum_{n=0}^{1}\left(\frac{1}{2} + nm - \frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) = \frac{1}{2}, \ m = 0,1,$$

per cui anche Y è una v.a. di Bernoulli di parametro $1/2$.

Infine la densità condizionale di X dato $Y=0$, per $n=1$ è

$$p_{X|Y}(1|0) = \frac{p(1,0)}{p_Y(0)} = 0,$$

mentre per $n=0$ è

$$p_{X|Y}(0|0) = \frac{p(0,0)}{p_Y(0)} = 1,$$

ovvero condizionatamente a $Y=0$, X è quasi certamente nulla.

(ii) Si ha:

$$E(X) = E(Y) = 1/2, \ var(X) = var(Y) = 1/2 \cdot (1-1/2) = 1/4,$$

quindi

$$E(X^2) = E(Y^2) = var(X) + E^2(X) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

$$E(XY) = \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=0}^{1} nm\left(\frac{1}{2} + nm - \frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

quindi $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; d'altra parte, X e Y non sono indipendenti, poiché $p(n,m) \neq p_X(n)p_Y(m)$.

(iii) $Z = \max(X,Y) \in \{0,1\}$. Inoltre $\{Z = 0\} = \{X = 0, Y = 0\}$ e dunque

$$P(Z = 0) = p(0,0) = \frac{1}{2} \text{ e } P(Z = 1) = 1 - P(Z = 0) = \frac{1}{2}$$

per cui Z è una v.a. Bernoulliana di parametro $\frac{1}{2}$ e dunque $E(Z) = \frac{1}{2},\ var(Z) = \frac{1}{4}$.