Facoltà di Ingegneria
Calcolo delle Probabilità e Statistica
Ingegneria Civile e A&T e Informatica

Prima prova di valutazione in itinere - 5 Maggio 2023
A.A. 2022-2023

Durata della prova 2 h
Punteggi: 1) $3 + 3 + 3 + 9$; **2)** $6 + 6$.

Totale = 30.

Esercizio 1 Una fabbrica produce valvole di sicurezza per caldaie a gas, la produzione giornaliera è di 10000 valvole. Si sa che una valvola senza difetti supera sempre il collaudo finale, mentre se è difettosa supera tale controllo nel 5% dei casi. Si supponga che l' 1% delle valvole prodotte in un giorno sia difettoso.

(i) Qual è la probabilità che una valvola scelta a caso di un lotto giornaliero superi il controllo?

(ii) Qual è la probabilità che una valvola che ha superato il controllo sia difettosa?

(iii) Se X rappresenta il numero di valvole di un lotto giornaliero che superano il controllo, quanto vale $E(X)$?

(iv) Sia D l'evento che una valvola prodotta in un giorno sia difettosa, e consideriamo due v.a. stocasticamente indipendenti T_1 e T_2, aventi distribuzioni geometriche modificate, di parametri $p = 10 \cdot P(D)$ e $q = 2p$, rispettivamente. Calcolare:

(a) $P(T_2 \geq T_1)$;

(b) $P(T_1 + T_2 = 4)$;

(c) trovare la densità discreta di $Z := \min(T_1,\ T_2)$.

Esercizio 2 Si consideri la v.a. bidimensionale $(X, Y) \in \{0,\ 1\} \times \{1,\ 2,\ 3\}$ la cui densità discreta $p(x, y) = P(X = x,\ Y = y),\ (x, y) \in \{0,\ 1\} \times \{1,\ 2,\ 3\}$, è data da:

$$\begin{pmatrix} p(0,1) & p(0,2) & p(0,3) \\ p(1,1) & p(1,2) & p(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/9 & 1/18 & 2/9 \end{pmatrix}$$

(i) Trovare le densità marginali di X e di Y. Si tratta di densità note ?

(ii) Calcolare $E(X),\ E(Y),\ E(X^2),\ E(Y^2)$ e $cov(X, Y)$. Le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti?

Calcolo delle Probabilità e Statistica, a.a. 2022-23

Soluzioni della prima prova di valutazione in itinere - 5 Maggio 2023

Esercizio 1 Indichiamo con D l'evento che una valvola del lotto giornaliero sia difettosa e con S l'evento che una valvola del lotto giornaliero superi il controllo; si ha

$$P(D) = 0.01,\ P(S|D) = 0.05,\ P(S|D^C) = 1.$$

(i) Per la formula della probabilità totale risulta:

$$P(S) = P(S|D)P(D) + P(S|D^C)P(D^C) = 0.05 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.99 = 0.9905$$

(ii) Per la formula di Bayes:

$$P(D|S) = \frac{P(S|D)P(D)}{P(S)} = \frac{0.05 \cdot 0.01}{0.9905} = \frac{1}{1981} = 0.0005048.$$

(iii) Il numero delle valvole che superano il controllo in un lotto giornaliero di 10000 valvole è una v.a. $X \sim B(10000, 0.9905)$; quindi $E(X) = 10000 \cdot 0.9905 = 9905$.

(iv) Risulta che $T_1 - 1 \sim Geom(p)$ e $T_2 - 1 \sim Geom(q)$ con $p = 10P(D) = 0.1$ e $q = 20P(D) = 0.2$.

(a) Si ha:

$$P(T_2 \geq T_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_1 = k, T_2 \geq k) =$$

(essendo T_1 e T_2 indipendenti)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_1 = k)P(T_2 \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_1 = k)P(T_2 > k - 1),$$

e ricordando che per una v.a. T_2, geometrica modificata di parametro q risulta
$P(T_2 > n) = (1 - q)^n$, otteniamo:

$$P(T_2 \geq T_1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^{k-1}$$

$$= p\sum_{j=0}^{\infty}[(1-p)(1-q)]^j = p\frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p}{q+p-pq}$$

$$= \frac{0.1}{0.2 + 0.1 - 0.1 \cdot 0.2} = \frac{0.1}{0.28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

e quindi infine $P(T_2 \geq T_1) = \frac{5}{14} = 0.3571429$.

(b) Si ha:

$$P(T_1 + T_2 = 4) = P(T_1 = 1)P(T_2 = 3) + P(T_1 = 3)P(T_2 = 1) + P(T_1 = 2)P(T_2 = 2)$$

$$= pq(1-q)^2 + p(1-p)^2q + p(1-p)q(1-q) = 0.0434\ .$$

(c) Se $Z = \min(X, Y)$, il range di Z è formato dagli interi positivi e per ogni intero positivo n si ha:

$$P(Z > n) = P(X > n)P(Y > n) = (1-p)^n(1-q)^n = [(1-p)(1-q)]^n$$

$$= [1 - q - p + pq]^n = (1 - \theta)^n,$$

dove $\theta = q + p - pq = 0.2 + 0.1 - 0.02 = 0.28 = 7/25$.

Da questo segue infine che Z ha distribuzione geometrica modificata di parametro $\theta = 7/25$.

Esercizio 2 (i) La densità marginale di X è, per $x \in \{0, 1\}$:

$$p_X(x) = \sum_{y \in \{1,2,3\}} p(x, y) = p(x, 1) + p(x, 2) + p(x, 3).$$

Da cui:

$$p_X(0) = 1/2 \text{ e } p_X(1) = 1/2,$$

per cui X è una v.a. di Bernoulli di parametro 1/2.

La densità marginale di Y è, per $y \in \{1, 2, 3\}$:

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{0,1\}} p(x, y) = p(0, y) + p(1, y).$$

Da cui:

$$p_Y(1) = 7/18 \ , \ p_Y(2) = 4/18, \ p_Y(3) = 7/18 \ .$$

(ii) Si ha: $E(X) = 1/2$, $var(X) = 1/2 \cdot (1 - 1/2) = 1/4$, quindi $E(X^2) = var(X) + E^2(X) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

$$E(Y) = 1 \cdot 7/18 + 2 \cdot 4/18 + 3 \cdot 7/18 = 36/18 = 2;$$

$$E(Y^2) = 1^2 \cdot 7/18 + 2^2 \cdot 4/18 + 3^2 \cdot 7/18 = 86/18 = 4.7777778.$$

Quindi $var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 86/18 - 4 = 7/9 = 0.7777$.

Inoltre, $Z = XY$ prende valori in $\{0, 1, 2, 3\}$ con probabilità:

$$P(Z = 0) = P(X = 0) = 1/2,$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = p(1, 1) = 2/9,$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 2) = p(1, 2) = 1/18,$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 3) = p(1, 3) = 2/9.$$

Quindi: $E(Z) = E(XY) = 0 \cdot 1/2 + 1 \cdot 4/18 + 2 \cdot 1/18 + 3 \cdot 4/18 = 1$ e

$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 1/2 \cdot 2 = 0$, per cui le v.a. X e Y sono scorrelate. Però esse non sono indipendenti, poiché ad esempio $1/6 = p(0, 1) \neq p_X(0)p_Y(1) = 1/2 \cdot 7/18 = 7/36$.